Урок 2. Лінійні та квадратні нерівності з однією змінною та їх системи.

Цілі:домогтися засвоєння учнями схеми розв'язування лінійних нерівностей з однією змінною і нерівностей з однією змінною, що містять дроби із числовими знаменниками; домогтися розуміння та засвоєння учнями схеми розв'язування квадратних нерівностей із використанням побудови схеми графіка квадратичної функції.

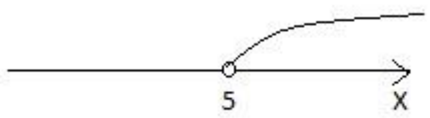
Завдання: виробити вміння виконувати дії відповідно до схеми розв'язування лінійних нерівностей з однією змінною і найпростіші рівносильні перетворення нерівностей із застосуванням властивостей числових нерівностей; розв’язувати числові нерівності, що містять дроби із числовими знаменниками; розв’язувати квадратні нерівності.

І.Лінійні нерівності з однією змінною

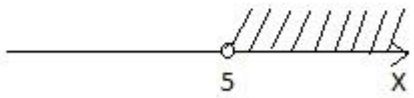
1. Числові проміжки.

Розв’язками нерівностей є числові проміжки.

Наприклад, якщо $x > 5$, то на координатній прямій це числа, які розташовані праворуч від числа 5, що можна наочно зобразити так:

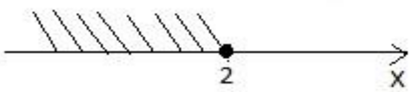


або



У відповідь записують $x \in (5; +\infty)$ (x належить проміжку від 5 до плюс нескінченності). Нуль і одиничний відрізок на координатній прямій не позначають.

Якщо $x \le 2$, то



і у відповідь записують $x \in (-\infty; 2]$.

Якщо знаки $>$ або $<$, то біля числа у відповіді кругла дужка і число на координатній прямій позначають не замальованою точкою. Якщо знаки $\le$ або $\ge$ - квадратна дужка і точка замальована.

2. Розв’язування лінійних нерівностей .

Нерівності виду $ax > b$, $ax \ge b$, $ax < b$, $ax \le b$, a і b – деякі відомі числа, x – змінна, називаються лінійними нерівностями з однією змінною.

Схема розв’язування:

- Якщо $a \ne 0$, для розв’язування лінійної нерівності з однією змінною потрібно поділити обидві частини нерівності на a. При цьому, якщо $a > 0$, то знак нерівності не змінюється; якщо $a < 0$, знак нерівності змінюється на протилежний (за властивістю 4 нерівностей з уроку № 1).
- Якщо $a = 0$, то або розв’язком нерівності є будь-яке число ($0x < 5$), або нерівність розв’язків не має ($0x > 5$).

Алгоритм розв'язування лінійних нерівностей :

1. Якщо в нерівності є дроби с числовим знаменником, то множимо праву і ліву частини нерівності на спільний знаменник всіх дробів.
2. Якщо є дужки, розкриваємо дужки.
3. Переносимо доданки зі змінною в одну частину нерівності, а доданки без змінної в іншу, використовуючи властивість 8 з попереднього уроку.
4. Зводимо подібні доданки, отримуємо лінійну нерівність.
5. Розв'язуємо лінійну нерівність за схемою.

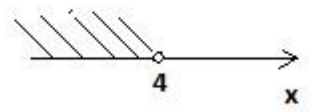
Приклад. Розв'язати нерівності:

а) $3(5 + x) > 11 + 8(x - 2)$; б) $y - 7(y + 1) \le 5 - 6(y + 2)$; в) $x - \frac{x+3}{2} \ge \frac{2x-1}{4}$;

г) $\frac{y+1}{2} + \frac{2y-1}{6} \le y$.

Розв'язання:

а) $15 + 3x > 11 + 8x - 16$;
$3x - 8x > 11 - 16 - 15$;
$-5x > -20$;
$x < 4$

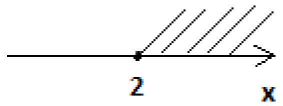


Відповідь. $x \in (-\infty; 4)$

б) $y - 7y - 7 \le 5 - 6y - 12$;
$y - 7y + 6y \le 5 - 12 + 7$;
$0y \le 0$;
Відповідь. *y є R(або y – будь-яке число)*

в) Помножимо обидві частини нерівності на *4:*
$4x - 2(x + 3) \ge 2x - 1$;
$4x - 2x - 6 \ge 2x - 1$;
$4x - 2x - 2x \ge -1 + 6$;
$0x \ge 5$.
Відповідь. *x є Ø (або нерівність розв'язків немає)*

г) Помножимо обидві частини нерівності на *6:*
$3(y + 1) + 2y - 1 \le 6y$;
$3y + 3 + 2y - 1 \le 6y$;
$3y + 2y - 6y \le 1 - 3$;
$-y \le -2$;
$y \ge 2$



Відповідь. $x \in [2; +\infty)$

II. Квадратні нерівності з однією змінною

Нерівність виду $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, де x – змінна, a,b,c – деякі числа, причому $a \neq 0$, називаються нерівностями другого степеня з однією змінною (або квадратними нерівностями).

Квадратні нерівності зручно розв’язувати за допомогою графіків квадратичних функцій.

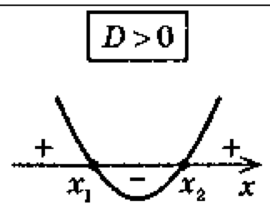
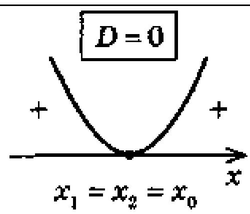
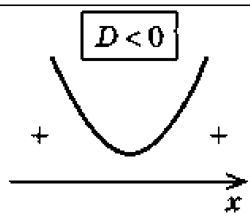
Для цього треба:

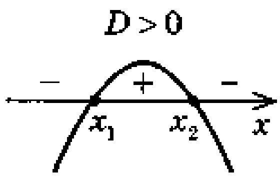
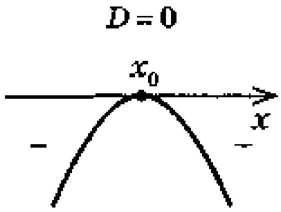
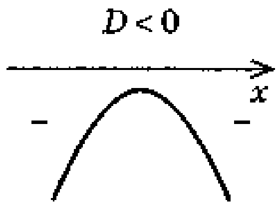
1) знайти корені тричлена $ax^2 + bx + c$ або з’ясувати що їх немає;
2) зобразити схематично графік функції $y = ax^2 + bx + c$, звертаючи увагу тільки на точки на точки перетину з віссю Ox і напрям віток параболи залежно від знака коефіцієнта a;
3) знайти на осі Ox проміжки, для яких виконується дана нерівність. Для випадку > 0 відповідно отримаємо проміжок, для якого точки параболи лежать вище осі Ox, для випадку < 0 відповідно отримаємо проміжки, для яких точки параболи лежать нижче осі Ox

Схема розв'язування нерівності $ax^2 + bx + c > 0$ залежно від a і D

$(D = b^2 – 4ac)$

$a > 0$

		
$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$	$x \in R$

$a < 0$		
		
$x \in (x_1; x_2)$	$x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$	$x \in R$

x_1 і x_2 – нулі функції $y = ax^2 + bx + c$

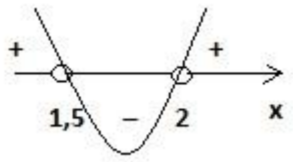
Приклад 1. Розв’язати нерівність $2x^2 – 7x + 6 > 0$.

Розв’язання:

$2x^2 – 7x + 6 = 0$, $D = b^2 – 4ac = 7^2 - 4\cdot2\cdot6 = 1$,

$$x_{1.2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2*2} = \frac{7 \pm 1}{4}, x_1 = 2, x_2 = 1{,}5.$$

Нарисуємо ескіз графіка функції $y = 2x^2 – 7x + 6$ *де* $a = 2 > 0$(вітки напрямлені вгору) *і* $D = 1 > 0$



З рисунка видно, що відповідна квадратична функція набуває додатних значень на кожному з проміжків $(-\infty;\ 1{,}5)$ і $(2;\ +\infty)$.

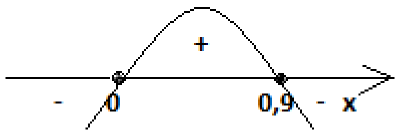
Відповідь: $(-\infty;\ 1{,}5)$ і $(2;\ +\infty)$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $-10x^2 + 9x \geq 0$.

Розв'язання:

$-10x^2 + 9x = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 0{,}9.$

Нарисуємо ескіз графіка функції $y = -10x^2 + 9x$, вітки параболи напрямлені вниз.

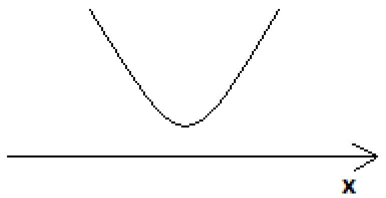


Відповідь: $[0;\ 0{,}9]$

Приклад 3. Розв'язати нерівність $7x^2 - 10x + 7 > 0$.

Розв'язання:

$7x^2 - 10x + 7 = 0,\ D < 0$ – коренів немає. Графік функції не перетинає вісь абсцис.



Відповідь: $(-\infty;\ +\infty)$

ІІІ. Системи нерівностей з однією змінною.

Розв'язком системи нерівностей з однією змінною називається значення змінної, яке є розв'язком кожної нерівності даної системи.

Розв'язати систему нерівностей означає знайти всі її розв'язки або показати, що їх не існує.

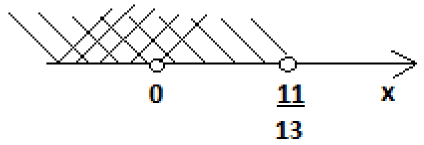
Щоб розв'язати систему нерівностей, кожну її нерівність поступово спрощують, замінюючи рівносильною. Знаходять розв'язок кожної нерівності, а потім зображають множину розв'язків кожної нерівності на одній координатній прямій. У відповідь записують їх спільний розв'язок.

Приклад 1. Розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} \dfrac{x+8}{4} < 2, \\ 4 - \dfrac{5+5x}{3} > 1 - \dfrac{1-x}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 8 < 8, \\ 24 - 2(5 + 5x) > 6 - 3(1 - x) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x < 0, \\ -10x - 3x > 6 - 3 - 24 + 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x < \dfrac{11}{13} \end{cases}$$

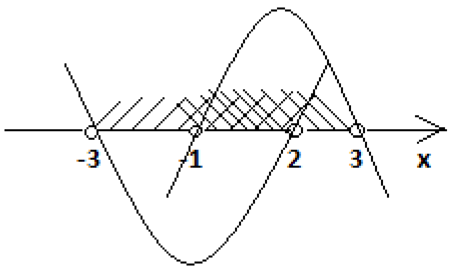
Зобразимо множину розв'язків кожної нерівності на одній координатній прямій.



Відповідь: $(-\infty;\ 0)$

Приклад 2.
$$\begin{cases} x^2 + x - 6 < 0, \\ -x^2 + 2x + 3 > 0 \end{cases}$$

Розв'язання:



Графіком функції у = $x^2 + x - 6$ є парабола, вітки якої напрямлені в гору. Знайдемо нулі даної функції: $x^2 + x - 6 = 0;\ x_1 = -3,\ x_2 = 2.$

Отже, $x^2 + x - 6 < 0,$ якщо $x \in (-3; 2).$

Графіком функції $y = -x^2 + 2x + 3$ є парабола, вітки якої напрямлені вниз. Знайдемо нулі цієї функції: $-x^2 + 2x + 3 = 0;\ x_1 = 3,\ x_2 = -1.$

Отже, $-x^2 + 2x + 3 > 0,$ якщо $x \in (-1; 3).$

Тоді розв'язком системи є спільний проміжок $(-1; 2).$

Відповідь: $x \in (-1; 2).$

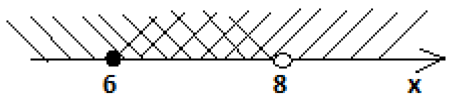
Приклад 3. Розв'язати подвійну нерівність $-11 < \frac{2-3y}{2} \le -8$.

Розв'язання:

Дана нерівність рівносильна системі нерівностей:
$$\begin{cases} \frac{2-3y}{2} \le -8, \\ \frac{2-3y}{2} > -11. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} 2-3y \le -16, \\ 2-3y > -22; \end{cases} \quad \begin{cases} -3y \le -16-2, \\ -3y > -22-2; \end{cases} \quad \begin{cases} -3y \le -18, \\ -3y > -24; \end{cases} \quad \begin{cases} y \ge 6, \\ y < 8. \end{cases}$$



Відповідь: $x \in (6; 8).$

IV. Завдання для самостійної роботи:

1. Розв'язати нерівності:

1) $x - 2 \geq 4{,}7(x - 2) - 2{,}7(x - 1)$; 2) $x - \frac{2x+3}{2} \leq \frac{x-1}{4}$; 3) $-5x^2 + 11x - 6 > 0$;

4) $3x^2 < -2x$; 5) $-0{,}2 \leq \frac{5x+2}{4} \leq 2$.

2. Розв'язати системи нерівностей:

1) $\begin{cases} \frac{3x-7}{4} \leq \frac{2x-3}{5} + 1, \\ \frac{2x+3}{2} + 1 > x - 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x^2 - 27x - 7 > 0, \\ x > 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + x - 6 < 0, \\ -x^2 + 2x + 3 > 0, \end{cases}$