Розв'язування раціональних рівнянь з модулем

При розв’язуванні рівнянь, що містять змінну під знаком модуля, найчастіше застосовують такі методи, як:

а) розкриття модуля за означенням;

б) піднесення обох частин рівняння до квадрата;

в) метод інтервалів.

За визначенням модуля:

$|x| = \begin{cases} x, \text{якщо} x \geq 0 \\ -x, якщо\ x < 0 \end{cases}$; $\qquad |f(x)| = \begin{cases} -f(x), якщо\ x < 0 \\ f(x), якщо\ x \geq 0 \end{cases}$

Властивості модуля:

$|x| \geq 0$

$|x| \geq x$

$|xy| = |x| \cdot |y|$

$|x|^2 = x^2$

$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

$|-x| = |x|$

I. Рівняння виду $|f(x)| = a$

Якщо $a < 0$, то рівняння розв’язків не має;

якщо $a = 0$, то $f(x) = 0$;

якщо $a > 0$, то $f(x) = a, або\ f(x) = -a$.

Розв’язати рівняння:

1) $|x + 3| = -2$

Розв’язання

$|x + 3| = -2$ розв’язків не має, оскільки з визначення модуля випливає, що $|f(x)| \geq 0$ для будь-якого x з області визначення функції $f(x)$.

Відповідь: не має коренів.

2) $|x^2 - 5x + 4| = 4$

Розв’язання

$x^2 - 5x + 4 = 4$;

$x^2 - 5x = 0$;

$x_1=0$; $\quad x_2=5$.

$x^2 - 5x + 4 = -4$;

$x^2 - 5x + 8 = 0$;

$D < 0$ коренів не має.

Відповідь: 0; 5.

3) $|x^2 - 6|x| + 4| = 1$

Розв’язання

$x^2 - 6|x| + 4 = 1$;

$x^2 - 6|x| + 3 = 0$;

$|x| = t \geq 0$;

$t^2 - 6t + 3 = 0$

$t_1 = \frac{6-\sqrt{24}}{2}$; $\quad t_2 = \frac{6+\sqrt{24}}{2}$;

$t_1 = 3 - \sqrt{6}$; $\quad t_2 = 3 + \sqrt{6}$;

$x = \pm 3 \pm \sqrt{6}$.

$x^2 - 6|x| + 4 = -1$;

$x^2 - 6|x| + 5 = 0$;

$|x| = t \geq 0$;

$t^2 - 6t + 5 = 0$

$t_3 = 5$; $t_4 = -1$(не задов.)

$|x| = 5$;

$x = \pm 5$.

Відповідь: $\pm 3 \pm \sqrt{6}$; ± 5.

II. Рівняння виду $|f(x)| = g(x)$

Рівняння рівносильне двом системам

$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} f(x) = -g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

розв'язки яких і є коренями рівняння.

Приклад.

Розв'язати рівняння:

1) $|x^2 - 2x| = 3 - 2x$

Розв'язання

$\begin{cases} x^2 - 2x = 3 - 2x \\ 3 - 2x \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -x^2 + 2x = 3 - 2x \\ 3 - 2x \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - 3 = 0 \\ x \leq 1{,}5 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x \leq 1{,}5 \end{cases}$

$\begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ x \leq 1{,}5 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 3 \\ x \leq 1{,}5 \end{cases}$

Відповідь: $-\sqrt{3}$; 1.

2) $|x - 2| - 2x - 1 = 0$ $|x - 2| = 2x + 1$

Розв'язання

$\begin{cases} x - 2 = 2x + 1 \\ 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -x = 3 \\ x \geq -0{,}5 \end{cases}$

$\begin{cases} -(x - 2) = 2x + 1 \\ 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -x + 2 = 2x + 1 \\ x \geq -0{,}5 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -3 \\ x \geq -0{,}5 \end{cases}$ $\begin{cases} -3x = -1 \\ x \geq -0{,}5 \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x \geq -0{,}5 \end{cases}$ Відповідь: $\frac{1}{3}$.

III. Спосіб розв'язання, враховуючи область значень модуля.

Розв'язати рівняння:

1) $|2x+2|+|x-5|+1=0$

Розв'язання

Запишемо рівняння в вигляді

$|2x+2|+|x-5|=-1$

Тут у лівій частині стоїть додатне число для всіх значень x, а в правій – від'ємне. Отже, розв'язків не має.

2) $x^2+|1-x|+|3-x|=1$

Розв'язання

Запишемо рівняння у вигляді

$|1-x|+|3-x|=1-x^2$

Ліва частина додатна, тому розв'язок може бути при $1-x^2 \geq 0$,тобто при $-1 \leq x \leq 1$. .

Але при таких значеннях х найменше значення, яке досягається лівою частиною, дорівнює 2, а найбільше значення, яке досягається правою частиною , дорівнює 1. Тому рівняння розв'язків не має.

Відповідь: рівняння не має розв'язків.

IV. Рівняння виду $|f(x)| = |g(x)|$

Так як обидві частини рівняння невід'ємні, то рівняння буде рівносильно рівнянню $(f(x))^2 = (g(x))^2$

Розв'язати рівняння:

1) $|4x-5|-|2-x|=0$

Розв'язання

$|4x-5|=|2-x|$

$(4x-5)^2=(2-x)^2$

$16x^2-40x+25=4-4x+x^2$

$15x^2-36x+21=0$

$5x^2-12x+7=0$

$D=4$

$x_1=1$

$x_2=1{,}4$

Відповідь :1; 1,4.

V. Рівняння виду $|f_1(x)|+|f_2(x)|+\dots+|f_n(x)| = g(x)$

Краще всього розв'язувати методом інтервалів, який полягатиме в наступному:

а)знаходимо точки, в яких вираз, що стоїть під знаком модуля рівний нулю. Ці точки розбивають числову вісь на інтервали, на кожному із яких вираз під знаком модуля зберігає знак;

б)розкриваємо всі модулі на кожному інтервалі і розв'язуємо отримані рівняння без модулів;

в)об'єднання знайдених розв'язків складає множину розв'язків заданого рівняння.

Приклад.

Розв'язати рівняння:

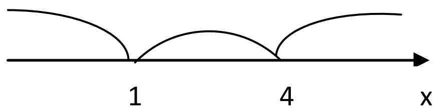
а) $\left|4-x\right| + \left|2x-2\right| = 5-2x$

Розв'язання

Вираз під модулем перетворюється в нуль при x_1=4; x_2=1.

Ці точки розбивають числову вісь на три інтервали:

x≤1; 1<x≤4; x>4



Розв'язуємо рівняння на кожному з інтервалів.

1) Якщо x≤1, то маємо рівняння

$4-x-(2x-2)=5-2x$

$4-x-2x+2=5-2x$

$x=1$

2) Якщо 1<x≤ 4, то маємо рівняння

$4-x+(2x-2)=5-2x$

$4-x+2x-2=5-2x$

$3\,x=3$

$$x=1; x\in\emptyset$$

3) Якщо x>4, то маємо рівняння

$-(4-x)+(2x-2)=5-2x$

$x-4+2x-2=5-2x$

$5x=11$

$$x=2{,}2; x\in\emptyset$$

Відповідь: 1.

б) $\left|x+5\right| + \left|x-8\right| = 13$

Розв'язання

$x_1=-5;\ x_2=8$

1) Якщо $x<-5$,то маємо рівняння

$-(x+5)-(x-8)=13$

$-x-5-x+8=13$

$x=-5;\ \ x\in\emptyset$

2) Якщо $-5\le x\le 8$, то маємо рівняння

$(x+5)-(x-8)=13$

13=13

$x\in[-5;8]$

3) Якщо $x>8$, то маємо рівняння

$x+5+x-8=13$

$x=8;\ \ x\in\emptyset$

Відповідь:$[-5;8]$.

в) $\frac{3}{|x+3|-1} = |x+2|$

Розв'язання

1) Якщо, $x \leq -3$, то

$$\frac{3}{-(x+3)-1} = -(x+2)$$

$$\frac{3}{-x-4} = -x-2$$

$$\frac{3}{x+4} = x+2$$

$$\frac{x^2+6x+5}{x+4} = 0$$

$x^2+6x+5=0; \quad x \neq -4$

$x_1 = -1;$

$x_2 = -5$ *не належить* $(-\infty; -3]$

2) Якщо $-3 < x \leq -2$, то

$$\frac{3}{(x+3)-1} = -(x+2)$$

$$\frac{3}{x+2} = -x-2$$

$$\frac{x^2+4x+7}{x+2} = 0$$

$x^2+4x+7=0; \quad x \neq -2$

$D < 0$, не має розв'язків

3) Якщо $x > -2$, то

$$\frac{3}{x+3-1} = x+2$$

$$\frac{x^2+4x+1}{x+2} = 0$$

$x_1 = -2-\sqrt{3}$

$x_2 = -2+\sqrt{3}$

Відповідь: -1; -2 $+\sqrt{3}$

г) $|x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| = 4$

Розв'язання

Вираз під модулем перетворюється в нуль при x_1=1; x_2=2; x_3=3.

Ці точки розбивають числову вісь на чотири інтервали.

1) Якщо $x < 1$, то маємо рівняння

$-(x-1)+2(x-2)-3(x-3)=4$

$-2x+6=4$

$x=1$ *не належить* $(-\infty; 1)$

2) Якщо $1 \leq x < 2$, то маємо рівняння

$x-1+2(x-2)-3(x-3)=4$

4=4 $x \in [1; 2)$

3) Якщо $2 \le x < 3$,, то маємо рівняння

$x-1-2(x-2)-3(x-3)=4$

$-4x+12=4$ $x=2$

4) Якщо $x \ge 3$,то маємо рівняння

$x-1-2(x-2)+3(x-3)=4$

$2x-6=4$ $x=5$

Відповідь: $[1; 2]$, 5.