Способи розв'язування рівнянь вищих степенів.

Основними методами розв'язування рівнянь вищих степенів є метод розкладання на множники та заміни змінної, але єдиного загального методу не існує. Всі методи базуються на загальному підході, коли дане рівняння поступово замінюється простішим.

1.Рівняння виду $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d})=\boldsymbol{A}\ (a,b,c,d,A\in R)$

Якщо в рівнянні $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$, *то після об'єднання співмножників*

$(x^2+(a+b)x+ab)(x^2+(c+d)x+cd)=A$ *та заміни*

$x^2+(a+b)x=t$воно зводиться до квадратного.

Приклад. Розв'яжіть рівняння

$(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=1680:$

$((x-4)(x-7))((x-5)(x-6))=1680;$

$(x^2-11x+28)(x^2-11x+30)=1680;$

Нехай $x^2-11x+28=t,$ *тоді* $x^2-11x+30=t+2;$

$t(t+2)=1680$; $t^2+2t-1680=0;$ $t_1=40;\ t_2=-42.$

1) $x^2-11x+28=40;$

$x^2-11x-12=0;$

$x_1=-1;\quad x_2=12;$

2) $x^2-11x+28=-42;$

$x^2-11x+70=-42;$

$D=121-280=-159<0;$ рівняя коренів немає.

Відповідь: $-1; 12.$

2.Рівняння виду $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}(abcdA\neq 0).$

Якщо в рівнянні$\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{cd}$,то внаслідок об'єднання співмножників

$(x^2+(a+b)x+ab)(x^2+(c+d)x+cd)=Ax^2$, діленням обох частин на

$x^2\neq 0$ *і заміни* $x+\frac{ab}{x}=t$воно зводиться до квадратного.

Приклад. Розв'яжіть рівняння

$(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)=4x^2;$

Перевірити чи $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ **не є коренем рівняння** (576≠ 0)

$$((x+2)(x+12))((x+3)(x+8))=4x^2;$$

$$(x^2+14x+24)(x^2+11x+24)=0;$$

Поділити обидві частини на $x^2\neq 0;$

$$\left(x+14+\frac{24}{x}\right)\left(x+11+\frac{24}{x}\right)=4;$$

Нехай $x+\frac{24}{x}=t,$ *тоді* $(t+14)(t+11)=4;$

$$t^2+25t+154=4;$$

$$t^2+25t+150=0;$$

$t_1=-15, t_2=-10;$

Знайти відповідні значення початкової змінної

1) $x + \frac{24}{x} = -15;$

$x^2 + 15x + 24 = 0;$ $D = 225 - 96 = 129;$ $x_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{129}}{2};$

2) $x + \frac{24}{x} = -10;$ $x^2 + 10x + 24 = 0;$ $x_1 = -6;\ x_2 = -4.$

Відповідь: $\frac{-15 \pm \sqrt{129}}{2}$ $; -6 - 4.$

3. Розв'язування симетричних рівнянь.

1) Рівняння виду $\boldsymbol{ax^3 + bx^2 + bx + a = 0}$, *де* $\boldsymbol{a \neq 0, a, b \in R}$ називається симетричним рівнянням 3 степеня.

1. Симетричне рівняння 3 степеня має корінь $x = -1$.

2. Діленням многочлена $ax^3 + bx^2 + bx + a$ *на* $x + 1$рівняння зводиться до квадратного.

Приклад

$4x^3 - 3x^2 - 3x + 4 = 0;$

$x = -1 -$ *корінь. За схемою Горнера*

	4	-3	-3	4
-1	4	-7	4	0

Отже, $4x^3 - 3x^2 - 3x + 4 = (x + 1)(4x^2 - 7x + 4) = 0;$

$4x^2 - 7x + 4 = 0;$

$D = 49 - 64 = -15 < 0;$рівняння коренів немає.

Відповідь: -1.

2) Рівняння виду $\boldsymbol{ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0}$ $\boldsymbol{(a, b, c \in R, a \neq 0)}$ називається симетричним рівнянням 4 степеня.

Щоб розв'язати симетричне рівняння 4 степеня , треба:

1.Поділити обидві частини рівняння на $x^2 \neq 0$ і згрупувати отримані вирази так: $a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$

2. Введенням заміни $x + \frac{1}{x} = t$рівняння зводиться до квадратного.

Приклад

$x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0;$

Поділимо обидві частини рівняння на $x^2 \neq 0;$

$$x^4 + x - 4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0;$$

$x^2 + x - 4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0;$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 4 = 0;$$

Нехай $x + \frac{1}{x} = t;$ *тоді* $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = t^2;$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2;$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2;$$

$t^2 + t - 2 - 4 = 0;$

$t^2 + t - 6 = 0;$ $\quad t_1 = -3;\ t_2 = 2.$

Знайдемо відповідні значення початкової змінної:

1) $\quad x + \frac{1}{x} = -3;$

$$x^2 + 3x + 1 = 0;$$

$D = 9 - 4 = 5;$

$x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2};$

2) $x + \frac{1}{x} = 2;$

$$x^2 - 2x + 1 = 0;$$

$$(x - 1)^2 = 0;$$

$x = 1;$

Відповідь: $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2};\ 1.$

4. Рівняння виду $\boldsymbol{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0}$, $\boldsymbol{де\, a, b, c, d, e \in R}$називається зворотно-симетричним рівнянням четвертого степеня, якщо між коефіцієнтами виконується умова$\boldsymbol{\frac{a}{e} = \left(\frac{b}{d}\right)^2}$.

Щоб розв'зати рівняння, треба поділити обидві частини на $x^2 \neq 0$і згрупувати отримані вирази так: $a\left(x^2 + \frac{d^2}{b^2x^2}\right) + b\left(x^2 + \frac{d}{bx}\right) + c = 0.$

Введенням заміни $x + \frac{d}{bx} = t$ рівняння зводиться до квадратного.

Приклад

$x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4 = 0;$

$\frac{1}{4} = \left(\frac{2}{4}\right)^2$;отже рівняння зворотно-симетричне.

Поділимо обидві частини рівняння на $x^2 \neq 0$; маємо

$x^2 + 2x - 11 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{x^2} = 0;$

$\left(x^2 + \dfrac{4}{x^2}\right) + 2\left(x + \dfrac{2}{x}\right) - 11 = 0;$

Нехай $x + \frac{2}{x} = t, тоді\ \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 = t^2;$

$x^2 + 2x\dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x^2} = t^2;\ \ x^2 + \dfrac{4}{x^2} = t^2 - 4.$

$t^2 - 4 + 2t - 11 = 0;\ t^2 + 2t - 15 = 0;$

$t_1 = -5;\ t_2 = 3.$

Вертаємось до заміни:

1)$x+\frac{2}{x}=-5;\ x^2+5x+2=0; D=25-8=17;$

$$x_1=\frac{-5+\sqrt{17}}{2}; x_2=\frac{-5-\sqrt{17}}{2};$$

2) $x+\frac{2}{x}=3;\ x^2-3x+2=0;\ x_1=2;\ x_2=1.$

Відповідь: $1;\ 2;\ \frac{-5-\sqrt{17}}{2};\ \frac{-5+\sqrt{17}}{2}$.

5.Рівняння виду $\boldsymbol{af^2(x)+bf(x)g(x)+cg^2(x)=0}$,

де $\boldsymbol{a, b, c\ \in R}$, $\boldsymbol{f(x)}$ ***і*** $\boldsymbol{g(x)}$ ***– деякі*** *функції* називаються однорідними рівняннями другого степеня.

Щоб розв'язати рівняння треба:

1.Поділити обидві частини рівняння на $f^2(x)\neq 0$ *або* $g^2(x)\neq 0$.

2. Введенням заміни $\frac{f(x)}{g(x)}=t$ *або* $\frac{g(x)}{f(x)}=t$ рівняння зводиться до квадратного.

Приклад

$2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1);$

$2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x-1)(x^2+x+1);$

$$\frac{2(x^2+x+1)^2}{(x^2+x+1)^2}-\frac{7(x-1)^2}{(x^2+x+1)^2}=\frac{13(x-1)}{x^2+x+1};$$

$$2-7\left(\frac{x-1}{x^2+x+1}\right)^2=13\frac{x-1}{x^2+x+1};$$

Нехай $\frac{x-1}{x^2+x+1}=t,$ *тоді* $2-7t^2=13t;$

$7t^2+13t-2=0;$

$$D=169+56=225;$$

$$t_1=\frac{-13+15}{14}=\frac{1}{7};\ \ t_2=\frac{-13-15}{14}=-2;$$

Знайдемо відповідні значення початкової змінної:

1) $\frac{x-1}{x^2+x+1}=\frac{1}{7};\ \ x^2+x+1-7x+7=0;$

$x^2-6x+8=0;\ \ x_1=2;\ x_2=4;$

2) $\frac{x-1}{x^2+x+1}=-2;\ \ x-1=-2x^2-2x-2=0;$

$$2x^2+3x+1=0;$$

$$D=9-8=1;\ x_1=\frac{-3+1}{4}=-\frac{1}{2};\ x_2=\frac{-3-1}{4}=-1;$$

Відповідь: $2;\ 4;\ -\frac{1}{2};\ -1.$

6. Рівняння виду $\boldsymbol{\frac{ax}{px^2+nx+q}+\frac{bx}{px^2+mx+q}=c}$ $(c\neq 0)$

Після ділення чисельника і знаменника кожного дробу на $x\neq 0$,

$\frac{a}{px+\frac{q}{x}+n}+\frac{b}{px+\frac{q}{x}+m}=c$ *і заміни* $px+\frac{q}{x}=t$воно зводиться до квадратного.

Приклад

$$\frac{2x}{x^2-4x+2}+\frac{3x}{x^2+x+2}=-\frac{5}{4};$$
$$\frac{2}{x-4+\frac{2}{x}}+\frac{3}{x+1+\frac{2}{x}}=-\frac{5}{4};$$

Нехай $x+\frac{2}{x}=t$; *тоді* $\frac{2}{t-4}+\frac{3}{t+1}=-\frac{5}{4}$;

$\frac{t^2+t-12}{4(t-4)(t+1)}=0$;

$\begin{cases} t^2+t-12=0 \\ 4(t-4)(t+1)\neq 0; \end{cases} t_1=-4;\ t_2$=3.

1) $x+\frac{2}{x}=-4;\ x^2+4x+2=0;$

$D=16-8=8;$

$$x_{1,2}=-2\pm\sqrt{2}\ ;$$

2) $x+\frac{2}{x}=3; x^2-3x+2=0;$

$D=9-8-1;$

$$x_1=1;\ x_2=2.$$

Відповідь: $-2\pm\sqrt{2};\ \ 1;\ \ 2.$

7. Рівняння виду$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})^{\boldsymbol{n}}+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}\ \in \boldsymbol{R})$

Таке рівняння заміною $t=x+\frac{a+b}{2}$зводиться до квадратного.

Приклад

$$(x+1)^4+(x+5)^4=32;$$

Нехай $x+\frac{1+5}{2}=t$; тоді $t=x+3;\ x=t-3;$

$$(t-3+1)^4+(t-3+5)^4=0;$$
$$(t-2)^4+(t+2)^4=32;$$
$$(t-2)^2(t-2)^2+(t+2)^2(t+2)^2=32;$$
$$(t^2-4t+4)(t^2-4t+4)+(t^2+4t+4)(t^2+4t+4)=32;$$
$$t^4+24t^2=0;$$
$$t^2(t^2+24)=0;$$
$$t^2=0\quad \textit{або}\ t^2+24=0;$$

$t=0t^2\neq -24$; коренів немає

$x=t-3=0-3=-3;$

Відповідь: -3.

8. Рівняння,що розв’язуються методом виділення квадрата двочлена.

Якщо в рівнянні зустрічається сума двох квадратів, то потрібно спробувати виділити квадрат суми або квадрат різниці. Введіть заміну і таке рівняння зведеться до квадратного.

Приклад

$x^2 + \frac{81x^2}{(x+9)^2} = 40;$ *ОДЗ*: $x \neq -9;$

$x^2 + \left(\frac{9x}{x+9}\right)^2 = 40;$

$x^2 - 2x \cdot \frac{9x}{x+9} + \left(\frac{9x}{x+9}\right)^2 = 40 - 2x \cdot \frac{9x}{x+9};$

$\left(x - \frac{9x}{x+9}\right)^2 = 40 - \frac{18x^2}{x+9};$

$\left(\frac{x^2}{x+9}\right)^2 = 40 - \frac{18x^2}{x+9};$

Нехай $\frac{\square^2}{\square + 9} = \square;$ *тоді* $\square^2 = 40 - 18\square;$

$\square^2 + 18\square - 40 = 0;$

$\square_1 = -20;$ $\square_2 = 2.$

1) $\frac{\square^2}{\square+9} = -20;$

$\square^2 + 20\square + 180 = 0;$

$\square = 400 - 720 = -320 < 0;$ рівняння коренів не має .

2) $\frac{\square^2}{\square+9} = 2;$

$\square^2 - 2\square - 18 = 0;$

$\square = 1 + 18 = 19;$

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{19}.$

Відповідь: $1 \pm \sqrt{19}.$