

Дробово – раціональні рівняння.

Дробово – раціональними рівняннями називають рівняння у яких змінна (вираз із змінною) міститься у знаменнику дробу.

Область допустимих значень (ОДЗ) рівняння – спільна область визначення всіх виразів, що стоять в правій і лівій частинах рівняння.

Приклад: $\frac{3}{x+2} + \frac{5x}{3-x} = \frac{7}{x}$; $\frac{2x-1}{3x} + \frac{x-4}{5x} = \frac{7-2x}{x}$ дробово – раціональні рівняння.

Схема розв'язання 1:

1. Перенести всі члени рівняння в ліву сторону.
2. Виконати всі вказані дії (звести до спільного знаменника, виконати дії та звести подібні доданки), та одержати рівняння у якого ліва частина – дріб (або цілий вираз), а права – нуль.
3. Прирівняти чисельник отриманого дробу до нуля та розв'язати утворене рівняння.
4. Перевірити, чи при всіх знайдених розв'язках в знаменниках заданого рівняння будуть числа, що не дорівнюють нулю (якщо отримуємо в знаменнику нуль, то знайдений розв'язок є стороннім, тобто це число не є коренем даного рівняння).

Приклад: $\frac{2}{x} + \frac{2x}{x+1} = \frac{x^2+2}{x}$

Розв'язання: $\frac{2}{x} + \frac{2x}{x+1} - \frac{x^2+2}{x} = 0$

$$\frac{-x^2 + x}{x(x+1)} = 0$$

$$-x^2 + x = 0$$

$$x(-x + 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ або } -x + 1 = 0$$

$$x = 0 \text{ або } x = -1 - \text{два корені.}$$

При $x = 0$ у знаменнику першого дробу отримуємо нуль. Отже $x = 0$ не є коренем даного рівняння.

При $x = 1$ усі знаменники дробів не дорівнюють нулю. Отже $x = 1$ є коренем даного рівняння.

Відповідь: 1.

Схема розв'язання 2:

1. Знайти ОДЗ даного рівняння.
2. Знайти найменший спільний знаменник усіх дробів, що входять до рівняння.
3. Помножити обидві частини рівняння на знайдений спільний знаменник та розв'язати отримане рівняння.
4. Перевірити, чи всі знайдені розв'язки входять в ОДЗ (якщо знайдене число не входить в ОДЗ, то це число не є коренем даного рівняння).

Приклад: $\frac{2}{x} + \frac{2x}{x+1} = \frac{x^2+2}{x}$

Розв'язання: ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases}; \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$

Найменший спільний знаменник: $x(x+1)$, що не дорівнює нулю на ОДЗ.

$$\frac{2}{x} \cdot x(x+1) + \frac{2x}{x+1} \cdot x(x+1) = \frac{x^2+2}{x} \cdot x(x+1)$$

$$2(x+1) + 2x^2 = (x^2+2)(x+1)$$

$$2x+2+2x^2-x^3-2x-x^2-2=0$$

$$-x^3+x^2=0$$

$$x^2(-x+1)=0$$

$$x^2=0 \text{ або } -x+1=0$$

$x=0$ або $x=-1$ – два корені.

Враховуємо ОДЗ:

$x=0$ не задовольняє першу умову ОДЗ, отже $x=0$ не є коренем даного рівняння.

При $x=1$ обидві умови ОДЗ виконуються, отже $x=1$ є коренем даного рівняння.

Відповідь: 1.