Квадратні рівняння та рівняння, що зводяться до квадратних.

Квадратні рівняння.

Рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x – змінна, a, b, c – деякі числа, причому $a \neq 0$, називається квадратним рівнянням.

Приклад:$2x^2 - 5x + 3 = 0$; $5x^2 - 7 = 0$; $3x^2 - 8x = 0$– квадратні рівняння.

Повне квадратне рівняння розв'язується за формулою: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

де $D = b^2 - 4ac$ – називається дискримінантом квадратного рівняння.

Можливі три випадки:

1) Якщо $D > 0$, то рівняння має два різні корені:$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

2) Якщо $D = 0$, то рівняння має два однакові корені: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

(так як у двох коренів однакові значення то говорять, що при $D = 0$ рівняння має єдиний корінь)

3) Якщо $D < 0$, то рівняння не має дійсних коренів.

Схема розв'язання:

1. Визначити числові значення a, b, c.
2. Обчислити за формулою дискримінант і за його значенням визначити кількість коренів або їх відсутність.
3. Обчислити за формулою корені рівняння (якщо вони є).

Приклад 1:$3x^2 - 5x + 2 = 0$

Розв'язання:$a = 3$; $b = -5$; $c = 2$

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1 > 0$ – два різні корені

$x_1 = \frac{5+\sqrt{(-5)^2-4\cdot3\cdot2}}{2\cdot3} = 1$; $x_2 = \frac{5-\sqrt{(-5)^2-4\cdot3\cdot2}}{2\cdot3} = \frac{2}{3}$.

Відповідь: 1; $\frac{2}{3}$.

Приклад 2:$x^2 + 6x + 9 = 0$

Розв'язання:$a = 1$; $b = 6$; $c = 9$

$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$ – – єдиний корінь (два однакові корені)

$x_1 = x_2 = \frac{-6}{2\cdot1} = -3$.

Відповідь: -3.

Приклад 3: $2x^2 + x + 5 = 0$

Розв'язання:$a = 2$; $b = 1$; $c = 5$

$D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -39 < 0$ – не має дійсних коренів.

Відповідь: коренів   немає.

Цікава властивість:Якщо в квадратному рівнянні $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$одночасно збільшити перший коефіцієнт в m , $(m > 1)$ раз та зменшити вільний член в m раз, то отримаємо квадратне рівняння з коренями в m раз меншими ніж у вихідному рівнянні.А якщо в квадратному рівнянні одночасно зменшити перший коефіцієнт в m , $(m > 1)$ раз та збільшити вільний член в m раз, то отримаємо квадратне рівняння з коренями в m раз більшими ніж у вихідному рівнянні.

Приклад : Не розв'язуючи рівняння $3x^2 - 7x + 12 = 0$ складіть рівняння, корені якого будуть

а) в 5 раз менші;

б) у 6 разів більші ніж корені даного рівняння.

Розв'язання: $a = 3$; $b = -7$; $c = 12$

а) перший коефіцієнт збільшуємо у 5 раз, а вільний член зменшуємо у 5 раз:

$3 \cdot 5x^2 - 7x + \frac{12}{5} = 0; 15x^2 - 7x + 2{,}4 = 0$

б) перший коефіцієнт зменшуємо у 6 раз, а вільний член збільшуємо у 6 раз:

$\frac{3}{6}x^2 - 7x + 12 \cdot 6 = 0; 0{,}5x^2 - 7x + 72 = 0$

Відповідь: а) $15x^2 - 7x + 2{,}4 = 0$ б) $0{,}5x^2 - 7x + 72 = 0$

Неповні квадратні рівняння.

Квадратне рівняння називається неповним, якщо другий коефіцієнт або (та) вільний член дорівнюють нулю ($b = 0$ або (та) $c = 0$).

Приклад: $-2x^2 + 8 = 0$; $5x^2 - 4 = 0$ – неповні квадратні рівняння.

Різновиди неповних квадратних рівнянь:

1) при $b = 0$ і $c = 0$ маємо $ax^2 = 0$.

Схема розв'язання: $ax^2 = 0$.

$x^2 = 0$; $x = 0$ – єдиний корінь.

2) при $b \neq 0$ і $c = 0$ маємо $ax^2 + bx = 0$.

Схема розв'язання: $ax^2 + bx = 0$.

$x(ax + b) = 0$; *(виносимо спільний множник за дужки)*

$x = 0$ або $ax + b = 0$

$x = 0$ або $x = -\frac{b}{a}$ – два корені.

3) при $b = 0$ і $c \neq 0$ маємо $ax^2 + c = 0$.

Схема розв'язання: $ax^2 + c = 0$.

$$ax^2 = -c;$$
$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

Маємо два випадки: 1. при $-\frac{c}{a} > 0$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ – два корені;

2. при $-\frac{c}{a} < 0$ – коренів немає.

Приклад 1: $5x^2 - 4x = 0$

Розв'язання: $x(5x - 4) = 0$

$x = 0$ або $5x - 4 = 0$

$x = 0$ або $x = \frac{4}{5} = 0{,}8$ – два корені.

Відповідь: 0; $0{,}8$.

Приклад 2: $2x^2 + 5 = 0$

Розв'язання: $x^2 = -\frac{5}{2}$ – не має дійсних коренів.

Відповідь: коренівнемає.

Приклад 3: $3x^2 - 48 = 0$

Розв'язання: $3(x^2 - 16) = 0$

$x^2 - 16 = 0$

$x^2 = 16$

$x_1 = \sqrt{16} = 4; x_2 = -\sqrt{16} = -4$ – два корені.

Відповідь: -4; 4.

Зведені квадратні рівняння.

Квадратне рівняння називається зведеним, якщо перший його коефіцієнт дорівнює одиниці. Загальний вигляд: $\boldsymbol{x^2 + px + q = 0}$.

Приклад: $x^2 - 5x + 8 = 0$; $x^2 + 6x - 4 = 0$ – зведені квадратні рівняння.

Зведене квадратне рівняння розв'язується як за формулою повного квадратного рівняння, так і за формулою: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, де $D = \frac{p^2}{4} - q$ – називається дискримінантом зведеного квадратного рівняння.

Можливі три випадки:

1) Якщо $D > 0$, то рівняння має два різні корені:

$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$; $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

2) Якщо $D = 0$, то рівняння має два однакові корені: $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$.

(так як у двох коренів однакові значення то говорять, що при $D = 0$ рівняння має єдиний корінь)

3) Якщо $D < 0$, то рівняння не має дійсних коренів.

Схема розв'язання:

1. Визначити числові значення p, q.
2. Обчислити за формулою дискримінант і за його значенням визначити кількість коренів або їх відсутність.
3. Обчислити за формулою корені рівняння (якщо вони є).

Приклад 1: $x^2 - 4x + 3 = 0$

Розв'язання: $p = -4$; $q = 3$

$D = \frac{(-4)^2}{4} - 3 = 1 > 0$ – два різні корені

$x_1 = -\frac{-4}{2} + \sqrt{1} = 3$; $x_2 = -\frac{-4}{2} - \sqrt{1} = 1$.

Відповідь: 1; 3.

Приклад 2: $x^2 - 6x + 9 = 0$

Розв'язання: $p = -6$; $q = 9$

$D = \frac{(-6)^2}{4} - 9 = 1$ – – єдиний корінь(два однакові корені)

$x_1 = x_2 = -\frac{-6}{2} = 3.$

Відповідь: 3.

Приклад 3: $x^2 + 4x + 7 = 0$

Розв'язання: $p = 4; q = 7$

$D = \frac{4^2}{4} - 7 = -3 < 0$– не має дійсних коренів.

Відповідь: коренів немає.

Теорема Вієта.

Сума коренів квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ дорівнює взятому з протилежним знаком відношенню другого коефіцієнта до першого, а добуток – відношенню вільного члена до першого коефіцієнта.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Сума коренів зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$ дорівнює взятому з протилежним знаком другому коефіцієнту, а добуток – вільному члену.

$$x_1 + x_2 = -p \ ; \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Зауваження: Теорему Вієта для усного знаходження коренів доцільно застосовувати для зведених рівнянь з цілими коефіцієнтами.

Приклад 1:$x^2 - 7x + 12 = 0$

Розв'язання:$p = -7; q = 12$

$$x_1 + x_2 = 7 \ ; \quad x_1 \cdot x_2 = 12.$$

Відповідь: 3; 4.

Рівняння що зводяться до квадратних.

Якщо до рівняння змінна входить у одному й тому ж вигляді, то зручно відповідний вираз із змінною позначити однією буквою (новою змінною), тобто провести заміну змінної.

1.***Біквадратним називається рівняннявиду $ax^4 + bx^2 + c = 0$, де x – змінна, a, b, c – деякі числа,причому $a \neq 0$.***

Схема розв'язання:

1. Виконати заміну змінної: $x^2 = t$
2. Розв'язати утворене квадратне рівняння $at^2 + bt + c = 0$і отримати значення коренів t_1таt_2.
3. Виконати обернену заміну: $x^2 = t_1$; $x^2 = t_2$та розв'язати утворені неповні квадратні рівняння.
4. Обчислити за формулою корені рівняння (якщо вони є).

Приклад 1:$x^4 + x^2 - 2 = 0$

*Розв'язання:*заміна змінної: $x^2 = t$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$D = \frac{1^2}{4} + 2 = \frac{9}{4} > 0$ – два різні корені

$t_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}} = 1$; $t_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}} = -2.$

обернена заміна:

$x^2 = 1$– два різні корені або $x^2 = -2$ – не має дійсних коренів

$x_1 = 1$; $x_2 = -1$

Відповідь: $1;\ -1.$

2. Інші випадки заміни змінної:

Приклад 2:$(x^2 + x)^2 + x^2 + x - 6 = 0$

*Розв'язання:*заміна змінної: $x^2 + x = t$

$t^2 + t - 6 = 0$

$D = \frac{1^2}{4} + 6 = \frac{25}{4} > 0$ – два різні корені

$t_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{25}{4}} = 2$; $t_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{25}{4}} = -3.$

обернена заміна:$x^2 + x = 2$ або $x^2 + x = -3$

1) $x^2 + x = 2$ $\quad$ $x^2 + x - 2 = 0$

$D = \frac{1^2}{4} + 2 = \frac{9}{4} > 0$ – два різні корені

$x_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}} = 1$; $x = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}} = -2.$

$x_1 = 1$; $x_2 = -2$

2) $x^2 + x = -3$

$$x^2 + x + 3 = 0$$

$D = \frac{1^2}{4} - 3 = -2\frac{3}{4} < 0$ – не має дійсних коренів

Відповідь: $1;\ -2.$