

Дії над многочленами. Тотожні перетворення алгебраїчних раціональних та ірраціональних виразів

Дії над многочленами:

1) Додавання і віднімання:

Розкриваючи дужки, перед якими стоїть знак "+", знаки всіх членів, що були в цих дужках, не змінюють.

$$(a^3 - 8a^2 + 10) + (7a^3 - 10a + 4) = \underline{a^3} - 8a^2 + \underline{10} + \underline{7a^3} - 10a + \underline{4} = 8a^3 - 8a^2 - 10a + 14.$$

Розкриваючи дужки, перед якими стоїть знак "-", знаки всіх членів, що були в цих дужках, змінюють на протилежні.

$$(5b^2 - b + 1) - (8b^2 + 3b - 6) = \underline{5b^2} - \underline{b} + \underline{1} - \underline{8b^2} - \underline{3b} + \underline{6} = -3b^2 - 4b + 7.$$

2) Множення многочлена на одночлен:

$$2a^4(3a^2 - 4a^2 + 1) = 2a^4 \cdot 3a^2 - 2a^4 \cdot 4a + 2a^4 \cdot 1 = 6a^6 - 8a^5 + 2a^4.$$

3). Множення многочленів:

$$1. (3a^2 - 4ab + b^2)(2a - b) = 3a^2 \cdot 2a - 3a^2 \cdot b - 4ab \cdot 2a - 4ab \cdot (-b) + b^2 \cdot 2a + b^2 \cdot (-b) = 6a^3 - \underline{3a^2b} - \underline{8a^2b} + \underline{4ab^2} + \underline{2ab^2} - b^3 = 6a^3 - 11a^2b + 6a^2b - b^3.$$

$$2. (5^n + 1)(5^{2n} - 5^n + 2) - 5^{3n} = \underline{5^{3n}} - \underline{5^{2n}} + \underline{2 \cdot 5^n} + \underline{5^{2n}} - \underline{5^n} + 2 - \underline{5^{3n}} = 5^n + 2.$$

Дії з алгебраїчними раціональними виразами

1). Додавання і віднімання раціональних дробів з однаковими знаменниками

$$1. \frac{4}{2a-1} - \frac{2a-3}{2a-1} = \frac{4-(2a-3)}{2a-1} = \frac{4-2a+3}{2a-1} = \frac{7-2a}{2a-1}.$$

$$2. \frac{81b^2}{9b-a} + \frac{a^2}{a-9b} = \frac{81b^2}{9b-a} + \frac{a^2}{-(9b-a)} = \frac{81b^2}{9b-a} - \frac{a^2}{9b-a} = \frac{81b^2 - a^2}{9b-a} = \frac{(9b-a) \cdot (9b+a)}{9b-a} = 9b + a.$$

2). Додавання і віднімання раціональних дробів з різними знаменниками

$$1. \frac{a+b}{ab^2c} + \frac{1-b}{a^2bc} = \frac{a^2+ab+b-b^2}{a^2b^2c}.$$

$$2. \frac{a^2+2}{a^2+2a} + \frac{a+4}{2a+4} = \frac{a^2+2}{a(a+2)} - \frac{a-4}{2(a+2)} = \frac{2(a^2+2)-a(a-4)}{2a(a+2)} = \frac{2a^2+4-a^2+4a}{2a(a+2)} = \frac{a^2+4a+4}{2a(a+2)} = \frac{(a+2)^2}{2a(a+2)} = \frac{a+2}{2a}.$$

$$3. \frac{4a-b}{a^2-b^2} + \frac{1}{a-b} = \frac{4a-b}{(a-b)(a+b)} + \frac{1}{a-b} = \frac{4a-b+a+b}{(a-b)(a+b)} = \frac{3a}{(a-b)(a+b)}.$$

$$4. \frac{x}{x-4} - \frac{x+2}{x-2} = \frac{x^2-2x-x^2+4x-2x+8}{(x-4)(x-2)} = \frac{8}{(x-4)(x-2)}.$$

$$5. \frac{a^2-b^2}{3a+b} + 3a - b = \frac{a^2-b^2}{3a+b} + \frac{3a-b}{1} = \frac{a^2-b^2+9a^2-b^2}{3a+b} = \frac{10a^2-2b^2}{3a+b}.$$

3). Множення і ділення раціональних дробів.

$$1. \frac{a^2-25}{4a} \cdot \frac{4a^2}{a^2-5a} = \frac{(a^2-25)4a^2}{4a(a^2-5a)} = \frac{(a-5)(a+5)4a^2}{4aa(a-5)} = \frac{(a+5)4a^2}{4a^2} = a + 5.$$

$$2. \frac{b+3}{b^2-2b} : \frac{b+3}{4b-8} = \frac{b+3}{b^2-2b} \cdot \frac{4b-8}{b+3} = \frac{(b+3)4(b-2)}{b(b-2)(b+3)} = \frac{1}{b}.$$

4). Піднесення раціонального дроби до степеня

$$1. \left(\frac{-4m}{9n^3}\right)^2 = \frac{(-4m)^2}{(9n^3)^2} = \frac{16m^2}{81n^6}.$$

$$2. \text{Дано: } x^2 + \frac{1}{x^2} = 6. \text{ Знайти значення виразу } x - \frac{1}{x}.$$

Піднесемо вираз $x - \frac{1}{x}$ до квадрату

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = 6 - 2 = 4.$$

Тотожні перетворення раціональних виразів

1. Спростити вираз: $\left(\frac{8a}{4-a^2} - \frac{a-2}{a+2}\right) : \frac{a+2}{a} - \frac{2}{2-a}$.

$$1) \frac{8a}{4-a^2} - \frac{a-2}{a+2} = \frac{8a}{(2-a)(2+a)} - \frac{a-2}{a+2} = \frac{8a-(2-a)(a-2)}{(2-a)(2+a)} = \frac{8a+a^2-4a+4}{(2-a)(2+a)} = \frac{a^2+4a}{(2-a)(2+a)} = \frac{(a+2)^2}{(2-a)(2+a)} = \frac{a+2}{2-a};$$

$$2) \frac{a+2}{2-a} : \frac{a+2}{a} = \frac{a+2}{2-a} \cdot \frac{a}{a+2} = \frac{a}{2-a};$$

$$3) \frac{a}{2-a} + \frac{2}{a-2} = \frac{a}{2-a} - \frac{2}{2-a} = \frac{a-2}{2-a} = -\frac{(2-a)}{2-a} = -1.$$

2. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної вираз

$$\frac{b^2+9}{3b^2-b^3} + \left(\frac{b+3}{b-3}\right)^2 \left(\frac{1}{b-3} + \frac{6}{9-b^2} - \frac{3}{b^2+3b}\right) \text{ набуває додатних значень.}$$

Перетворення раціонального виразу виконаємо «ланцюжком»:

$$\begin{aligned} \frac{b^2+9}{3b^2-b^3} + \left(\frac{b+3}{b-3}\right)^2 \left(\frac{1}{b-3} + \frac{6}{9-b^2} - \frac{3}{b^2+3b}\right) &= \frac{b^2+9}{b^2(3-b)} + \frac{(b+3)^2}{(b-3)^2} \left(\frac{1}{b-3} + \frac{6}{b^2-9} - \frac{3}{b(b+3)}\right) = \frac{b^2+9}{-b^2(b-3)} + \frac{(b+3)^2}{(b-3)^2} \\ &\cdot \left(\frac{1}{b-3} - \frac{6}{(b-3)(b+3)} - \frac{3}{b(b+3)}\right) = \frac{b^2+9}{-b^2(b-3)} + \frac{(b+3)^2}{(b-3)^2} \cdot \frac{b^2+3b-6b-3b+9}{b(b-3)(b+3)} = \frac{b^2+9}{-b^2(b-3)} + \frac{(b+3)^2}{(b-3)^2} \cdot \frac{b^2-6b+9}{b(b-3)(b+3)} \\ &= \frac{b^2+9}{b^2(b-3)} + \frac{(b+3)(b-3)^2}{(b-3)^2 b(b-3)} = \frac{b^2+9}{b^2(b-3)} + \frac{b+3}{b(b-3)} = \frac{-b^2-9+b^2+3b}{b^2(b-3)} = \frac{3b-9}{b^2(b-3)} = \frac{3(b-3)}{b^2(b-3)} = \frac{3}{b^2}. \end{aligned}$$

При всіх допустимих значеннях змінної вираз $\frac{3}{b^2}$ приймає додатні значення.

Тотожні перетворення ірраціональних виразів

1. Розкладання на множники:

$$1) b^2 - 3 = b^2 - (\sqrt{3})^2 = (b - \sqrt{3})(b + \sqrt{3});$$

$$2) b - 9 = (\sqrt{b})^2 - 3^2 = (\sqrt{b} - 3)(\sqrt{b} + 3), \text{ якщо } b \geq 0;$$

$$3) \sqrt{2} + 6 = \sqrt{2} + 2 \cdot 3 = \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \cdot 3 = \sqrt{2}(1 + 3\sqrt{2});$$

$$4) a - 2\sqrt{2a} + 2 = (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{2} \cdot a + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{a} - \sqrt{2})^2.$$

2. Скорочення дробів:

$$1) \frac{\sqrt{55}+\sqrt{10}}{\sqrt{11}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5 \cdot 11} + \sqrt{5 \cdot 2}}{\sqrt{11} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{11} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{11} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{11} + \sqrt{2})}{\sqrt{11} + \sqrt{2}} = \sqrt{5};$$

$$2) \frac{5\sqrt{a}-7\sqrt{b}}{25a-49b} = \frac{5\sqrt{a}-7\sqrt{b}}{(5\sqrt{a})^2 - (7\sqrt{b})^2} = \frac{5\sqrt{a}-7\sqrt{b}}{(5\sqrt{a}-7\sqrt{b})(5\sqrt{a}+7\sqrt{b})} = \frac{1}{5\sqrt{a}+7\sqrt{b}}.$$

3. Звільнення від ірраціональності в знаменнику дробу:

$$1) \frac{5}{2\sqrt{y}} = \frac{5\sqrt{y}}{2\sqrt{y} \cdot \sqrt{y}} = \frac{5\sqrt{y}}{2y};$$

$$2) \frac{3}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{3(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{3(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b};$$

$$3) \frac{1+\sqrt{3x}}{1-\sqrt{3x}} = \frac{(1+\sqrt{3x})(1+\sqrt{3x})}{(1-\sqrt{3x})(1+\sqrt{3x})} = \frac{(1+\sqrt{3x})^2}{1-(\sqrt{3x})^2} = \frac{1+2\sqrt{3x}+3x}{1-3x}.$$

4. Спрощення виразів:

$$1) \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{1+2\sqrt{2}+2} = \sqrt{1+2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2} = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} = 1+\sqrt{2};$$

$$\begin{aligned} 2) \sqrt{91-40\sqrt{3}} &= \sqrt{16+75-2 \cdot 20\sqrt{3}} = \sqrt{4^2-2 \cdot 4 \cdot 5\sqrt{3}+(5\sqrt{3})^2} = \\ &= \sqrt{(4-5\sqrt{3})^2} = |4-5\sqrt{3}| = -4+5\sqrt{3} = 5\sqrt{3}-4. \end{aligned}$$

5. Внесення множника під знак кореня:

$$2) (2 - b) \sqrt{\frac{2}{b^2 - 4b + 4}},$$

$$1) a\sqrt{7}; \quad \text{Якщо } a \geq 0, \text{ то } a\sqrt{7} = \sqrt{a^2}\sqrt{7} = \sqrt{7a^2}.$$

$$\text{Якщо } a < 0, \text{ то } \sqrt{7} = -\sqrt{a^2}\sqrt{7} = -\sqrt{7a^2}.$$

$$2) (2 - b) \sqrt{\frac{2}{b^2 - 4b + 4}}, \text{ якщо } b > 2.$$

$$(2 - b) \sqrt{\frac{2}{b^2 - 4b + 4}} = -\sqrt{(2 - b)^2} \sqrt{\frac{2}{(b-2)^2}} = -\sqrt{\frac{(2-b)^2 \cdot 2}{(b-2)^2}} = -\sqrt{\frac{(b-2)^2 \cdot 2}{(b-2)^2}} = -\sqrt{2}.$$

6. Винесення множника з під знака кореня:

$$1) \sqrt{-a^7} = \sqrt{-a^6 a} = \sqrt{a^6} \sqrt{-a} = |a^3| \sqrt{-a} = -a^3 \sqrt{-a};$$

$$2) \sqrt{(a+2)^6 (a^2+2)^5}, \text{ якщо } a \leq -2.$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(a+2)^6 (a^2+2)^5} &= \sqrt{(a+2)^6} \sqrt{(a^2+2)^5} = |a+2|^3 \sqrt{(a^2+2)^4 (a^2+2)} = \\ &= -(a+2)^3 (a^2+2)^2 \sqrt{a^2+2}. \end{aligned}$$

Доведення тотожностей

$$\text{Доведіть тотожність: } \left(\frac{8\sqrt{x}}{\sqrt{x}+7} - \frac{15\sqrt{x}}{x+14\sqrt{x}+49} \right) : \frac{8\sqrt{x}+41}{x-49} + \frac{7\sqrt{x}-49}{\sqrt{x}+7} = \sqrt{x} - 7.$$

$$1) \frac{8\sqrt{x}}{\sqrt{x}+7} - \frac{15\sqrt{x}}{x+14\sqrt{x}+49} = \frac{8\sqrt{x}+41}{\sqrt{x}+7} - \frac{15\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+7)^2} = \frac{8x+56\sqrt{x}-15\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+7)^2} = \frac{8x+41\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+7)^2},$$

$$2) \frac{8x+41\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+7)^2} : \frac{8\sqrt{x}+41}{x-49} = \frac{\sqrt{x}(8\sqrt{x}+41)(\sqrt{x}-7)(\sqrt{x}+7)}{(\sqrt{x}+7)^2(8\sqrt{x}+41)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-7)}{\sqrt{x}+7},$$

$$3) \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-7)}{\sqrt{x}+7} + \frac{7\sqrt{x}-49}{\sqrt{x}+7} = \frac{x-7\sqrt{x}+7\sqrt{x}-49}{\sqrt{x}+7} = \frac{x-49}{\sqrt{x}+7} = \frac{(\sqrt{x}-7)(\sqrt{x}+7)}{\sqrt{x}+7} = \sqrt{x} - 7.$$