Схема Горнера. Метод невизначених коефіцієнтів

Це потрібно знати!

Схема Горнера – один з найпростіших способів ділення многочлена $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a^n$ на лінійний двочлен $x - a$. В таблиці запишемо коефіцієнти многочлена $(n-1)$ степеня

	a_0	a_1	a_2	…	a_n
a	a_0	$b_1 = a \cdot a_0 + a_1$	$b_2 = a \cdot b_1 + a_2$	…	$b_n = a \cdot b_{n-1} + a_n$
	коефіцієнти многочлена $(n-1)$ степеня				остача

Розділимо $5x^4 + 5x^3 + x^2 - 11$ на $x - 1$. Складемо таблицю з двох рядків: у першому рядку запишемо коефіцієнти многочлена $5x^4 + 5x^3 + x^2 - 11$ по спаданню степенів змінної. Дивимося, що даний многочлен не містить x, тобто коефіцієнт перед x дорівнює 0. Так як ми ділимо на $x - 1$, в другій клітинці запишемо одиницю:

	5	5	1	0	-11
1					

Почнемо заповняти пусті клітинки в другому рядку. В першу пусту клітинку запишемо 5, просто перенести її з відповідної клітинки першого рядка:

	5	5	1	0	-11
1	5				

Наступну клітинку заповнимо за таким принципом $1 \cdot 5 + 5 = 10$:

	5	5	1	0	-11
1	5	10			

Аналогічно заповнимо й четверту $1 \cdot 10 + 1 = 11$:

	5	5	1	0	-11
1	5	10	11		

Для п'ятої клітинки отримаємо $1 \cdot 11 + 0 = 11$:

	5	5	1	0	-11
1	5	10	11	11	

І, нарешті, для останньої, шостої клітинки, маємо $1 \cdot 11 - 11 = 0$:

	5	5	1	0	-11
1	5	10	11	11	0

Задача розв'язана, залишилося тільки записати відповідь:

	5	5	1	0	-11
1	5	10	11	11	0

$$5x^4 + 5x^3 + x^2 - 11 = (x-1)(5x^3 + 10x^2 + 11x + 11) + 0$$

Як бачите, числа, розташовані в другому рядку (між першим і останнім), є коефіцієнти многочлена, отриманого після ділення. Останнє число в другому рядку означає остачу від ділення або значення многочлена $5x^4 + 5x^3 + x^2 - 11$ при $x = 1$. Отже, якщо в нашому випадку остача дорівнює нулю, то многочлени діляться без остачі $5x^4 + 5x^3 + x^2 - 11 = (x-1)(5x^3 + 10x^2 + 11x + 11) + 0 = (x-1)(5x^3 + 10x^2 + 11x + 11)$.

Це потрібно вміти!

1. Розділимо многочлен $x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 5x - 47$ на $x + 3$. Зразу обговоримо, що вираз $x + 3$ треба представити у формі $x = -(-3)$. В схемі Горнера буде приймати участь саме -3.

	1	3	4	-5	-47
-3	1	0	4	-17	4

$x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 5x — 47 = (x + 3)(x^3 + 4x^2 - 17) + 4.$

Якщо наша мета – знайти всі корені многочлена, то схему Горнера можна застосовувати кілька разів поспіль, – до тих пір, поки ми не знайдемо всі корені.

2. Знайти всі корені многочлена $x^6 + 5x^5 + 5x^4 - 9x^3 - 14x^2 + 4x + 8$.

Цілий корінь потрібно шукати серед дільників вільного члена, тобто серед дільників числа 8. Тобто, цілими коренями можуть бути числа $-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8$. Перевіримо, наприклад, 1:

	1	5	5	-9	-14	4	8
1	1	6	11	2	-12	-8	0

Отже, остача дорівнює 0, тобто одиниця дійсно є коренем даного многочлена. Перевіримо одиницю ще кілька разів. Нову таблицю для цього створювати не будемо, а продовжимо використання попередньої:

	1	5	5	-9	-14	4	8
1	1	6	11	2	-12	-8	0
1	1	7	18	20	8	0	

Маємо в остачі нуль. Продовжимо таблицю до тих пір, поки не вичерпаємо всі можливі значення коренів:

	1	5	5	-9	-14	4	8
1	1	6	11	2	-12	-8	0
1	1	7	18	20	8	0	
-2	1	5	8	4	0		
-2	1	3	2	0			
-2	1	1	0				
-1	1	0					

Висновок:

$$x^6 + 5x^5 + 5x^4 - 9x^3 - 14x^2 + 4x + 8 = (x - 1)^2(x—(-2))^3(x—(-1)) = (x - 1)^2(x + 2)^3(x + 1).$$

Це потрібно знати!

Метод невизначених коефіцієнтів

Суть цього методу полягає в тому, що вигляд множників – многочленів, на які розкладається ліва частина рівняння, заздалегідь відомий.

Цей метод спирається на такі твердження:

1) два многочлени тотожно рівні тоді й тільки тоді, коли рівні їхні коефіцієнти при однакових степенях x;

2) будь-який многочлен третього степеня розкладається на добуток двох многочленів: многочлена першого та многочлена другого степенів;

3) будь-який многочлен четвертого степеня розкладається на добуток двох

многочленів другого степеня.

Розглянемо на прикладі: нехай треба розв'язати рівняння $x^3-3x^2+4x-2=0$.

Будемо шукати многочлени $\beta_1x^2+\beta_2x+\beta_3$ і $x-\alpha$ такі, щоб виконувалась тотожність: $x^3-3x^2+4x-2=(x-\alpha)(\beta_1x^2+\beta_2x+\beta_3)$.

Розкривати дужки в правій частині цієї тотожності та звівши подібні члени, отримаємо: $x^3-3x^2+4x-2=\beta_1x^3+(\beta_2-\alpha\beta_1)x^2+(\beta_3-\alpha\beta_2)x-\alpha\beta_3$.

Треба прирівняти коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах останньої рівності, одержуємо систему рівнянь для знаходження α; β_1; β_2; β_3, тобто введених невизначених коефіцієнтів, які вважаються цілими числами.

$$\begin{cases}\beta_1=1\\ \beta_2-\alpha\beta_1=-3\\ \beta_3-\alpha\beta_2=4\\ \alpha\beta_3=2\end{cases}\quad\begin{cases}\beta_1=1\\ \beta_2=\alpha-3\\ \beta_3=\alpha(\alpha-3)+4\\ \alpha\beta_3=2\end{cases}$$

Оскільки α і β_3 – цілі числа, то знайдемо всі можливі пари цих чисел з рівності $\alpha\beta_3=2$:

$\alpha=1,\ \beta_3=2;\ \ \alpha=2,\ \beta_3=1;$

$\alpha=-1,\ \beta_3=-2;\ \ \alpha=-2,\ \beta_3=-1.$

Єдина пара, що задовольняє систему: $\alpha=1,\ \beta_3=2$.

Розв'язуючи далі систему в цілих числах, отримаємо: $\alpha=1,\ \beta_1=1, \beta_2=-2, \beta_3=2$

Отже, маємо рівняння $x^3-3x^2+4x-2=(x-1)(x^2+2x+2)=0$, розв'язком якого є $x=1$.

Це потрібно вміти!

1. Розв'язати рівняння: $x^4+x^3-4x^2-5x-5=0$, якщо два його корені – протилежні числа.

Якщо два корені відповідають указаній умові, то маємо такий розклад даного рівнянні з невизначеними коефіцієнтами:

$$x^4+x^3-4x^2-5x-5=(x^2-a^2)(x^2+bx+c)=x^4+bx^3+(c-a^2)x^2-a^2bx-a^2c.$$

Якщо прирівняти коефіцієнти лівої та правої частин тотожності при однакових степенях x, отримуємо систему рівнянь: $\begin{cases}b=1,\\ a^2-c=4,\\ a^2b=5,\\ a^2c=5;\end{cases}$

Розв'язуючи систему рівнянь, маємо $a=\pm\sqrt{5}; b=1; c=1$.

Отже, $x^4+x^3-4x^2-5x-5=(x^2-5)(x^2+x+1)=0$. Звідси $x_1=\sqrt{5}; x_2=-\sqrt{5}.$

2. Розв'язати рівняння: $x^4+x^3-7x^2+2x+4=0$.

За допомогою схеми Горнера легко переконатися, що жоден із дільників вільного члена не є коренем рівняння, це означає, що рівняння не має раціональних коренів.

Подамо рівняння у вигляді добутку двох квадратичних тричленів із цілими коефіцієнтами: $(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=0$.

Розкриваємо дужки і зведемо подібні доданки:

$$x^4+(a+c)x^3+(ac+b+d)x^2+(ad+bc)x+bd=0.$$

Коефіцієнти рівні. Треба прирівняти коефіцієнти при однакових степенях x у даному і останньому рівняннях: $\begin{cases} a+c=1, \\ ac+b+d=-7, \\ ad+bc=2, \\ bd=4; \end{cases}$

Із рівності $bd=4$ маємо такі можливі пари чисел:

$$b=1, d=4; \qquad b=-1, d=-4;$$
$$b=4, d=1; \qquad b=-4, d=-1;$$
$$b=2, d=2; \qquad b=-2, d=-2.$$

Підставивши дані пари чисел в систему, знаходимо коефіцієнти a і c.

Маємо: $a=-1; b=-1; c=2; d=-4$.

Тоді дане рівняння запишеться так: $(x^2-x-1)(x^2+2x-4)=0$.

Отримане рівняння еквівалентне сукупності рівнянь: $\left[\begin{array}{l} x^2-x-1=0, \\ x^2+2x-4=0; \end{array}\right.$

Розв'язавши її, отримаємо корені: $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$; $-1\pm\sqrt{5}$.