

Ірраціональні числа. Арифметичний квадратний корінь.

Перетворення виразів, що містять корені. Порівняння ірраціональних виразів. Звільнення від ірраціональності в знаменнику виразу.

Це потрібно вміти!

1. При яких значеннях x має зміст вираз: а) $\sqrt{-5x}$; б) $\frac{3}{\sqrt{x-2}}$.

а) $-5x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$; б) $x - 2 \geq 0$ та $\sqrt{x-2} \neq 0 \Rightarrow x > 2$.

2. Спростіть вираз а) $\sqrt{a^{14}}$; б) $\frac{\sqrt{a^{12}b^{22}c^{36}}}{a^4b^8c^{10}}$, якщо $b < 0$

$$\text{а) } \sqrt{a^{14}} = |a^7| = \begin{cases} a^7, & \text{якщо } a \geq 0; \\ -a^7, & \text{якщо } a < 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \frac{\sqrt{a^{12}b^{22}c^{36}}}{a^4b^8c^{10}} = \frac{|a^6| \cdot |b^{11}| \cdot |c^{18}|}{a^4b^8c^{10}} = \frac{a^6(-b^{11})c^{18}}{a^4b^8c^{10}} = a^2c^8(-b^3) = -a^2b^3c^8$$

3. Винесіть множник з-під знака кореня:

$$\text{а) } \sqrt{150} = \sqrt{25 \cdot 6} = 5\sqrt{6}; \quad \text{б) } \sqrt{72a^8} = \sqrt{36 \cdot 2 \cdot a^8} = 6|a^4|\sqrt{2} = 6a^4\sqrt{2};$$

$$\text{в) } \sqrt{a^2b^3}, \text{ якщо } a < 0; \quad \sqrt{a^2b^3} = |a| \cdot |b|\sqrt{b} = -ab\sqrt{b}$$

4. Внесіть множник під знак кореня:

$$\text{а) } -2\sqrt{7} = -\sqrt{4} \cdot \sqrt{7} = -\sqrt{28};$$

$$\text{б) } 3b \cdot \sqrt{-\frac{b}{3}} = -\sqrt{9b^2} \cdot \sqrt{-\frac{b}{3}} = -\sqrt{\frac{9b^2}{1} \cdot \left(-\frac{b}{3}\right)} = -\sqrt{-3b^3}$$

5. Спростіть вираз:

$$\text{а) } \sqrt{54a} + \sqrt{24a} - \sqrt{600a} = \sqrt{9 \cdot 6a} + \sqrt{4 \cdot 6a} - \sqrt{100 \cdot 6a} = 3\sqrt{6a} + 2\sqrt{6a} - 10\sqrt{6a} = \sqrt{6a} \cdot (3 + 2 - 10) = -5\sqrt{6a};$$

$$\text{б) } (3 + 2\sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3}) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot (-\sqrt{3}) + 2\sqrt{3} \cdot 2 + 2\sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3}) = 6 - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{9} = 6 - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 2 \cdot 3 = 6 + \sqrt{3} - 6 = \sqrt{3}$$

6. Скоротіть дріб: а) $\frac{\sqrt{a}+2}{a-4} = \frac{\sqrt{a}+2}{(\sqrt{a})^2-(2)^2} = \frac{(\sqrt{a}+2)}{(\sqrt{a}-2) \cdot (\sqrt{a}+2)} = \frac{1}{\sqrt{a}-2};$

$$\text{б) } \frac{23-\sqrt{23}}{\sqrt{23}} = \frac{(\sqrt{23})^2-\sqrt{23}}{\sqrt{23}} = \frac{\sqrt{23} \cdot (\sqrt{23}-1)}{\sqrt{23}} = \sqrt{23} - 1;$$

$$\text{в) } \frac{b-8\sqrt{b}+16}{b-16} = \frac{(\sqrt{b})^2-2 \cdot \sqrt{b} \cdot 4+4^2}{(\sqrt{b})^2-4^2} = \frac{(\sqrt{b}-4)^2}{(\sqrt{b}-4) \cdot (\sqrt{b}+4)} = \frac{\sqrt{b}-4}{\sqrt{b}+4}.$$

7. Спростити вираз:

$$\text{а) } \sqrt{12 + 6\sqrt{3}} = \sqrt{9 + 3 + 6\sqrt{3}} = \sqrt{3^2 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{(3 + \sqrt{3})^2} = 3 + \sqrt{3};$$

$$6) \sqrt{10 + 8\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$$

$$1) \sqrt{9 + 4\sqrt{2}} = \sqrt{8 + 1 + 4\sqrt{2}} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 1 + 1^2} = \sqrt{(2\sqrt{2} + 1)^2} = 2\sqrt{2} + 1;$$

$$2) \sqrt{2 + (2\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2 + 1 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 + 1^2} = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = \sqrt{2} + 1;$$

$$3) \sqrt{10 + 8(\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{10 + 8\sqrt{2} + 8} = \sqrt{18 + 8\sqrt{2}} = \sqrt{16 + 2 + 8\sqrt{2}} = \sqrt{4^2 + 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{(4 + \sqrt{2})^2} = 4 + \sqrt{2}.$$

8. Звільнення від ірраціональності в знаменнику виразу

$$1) \frac{15}{2\sqrt{3}} = \frac{15 \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{5\sqrt{3}}{2};$$

$$2) \frac{14}{5\sqrt{2}-1} = \frac{14 \cdot (5\sqrt{2}+1)}{(5\sqrt{2}-1) \cdot (5\sqrt{2}+1)} = \frac{14(5\sqrt{2}+1)}{(5\sqrt{2})^2 - 1^2} = \frac{14(5\sqrt{2}+1)}{25 \cdot 2 - 1} = \frac{14(5\sqrt{2}+1)}{49} = \frac{10\sqrt{2}+2}{7};$$

$$3) \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}} = \frac{1 \cdot (\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1) \cdot (\sqrt{2}-1)} + \frac{1 \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{2})} +$$

$$+ \frac{1 \cdot (\sqrt{4}-\sqrt{3})}{(\sqrt{4}+\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{4}-\sqrt{3})} + \dots + \frac{1 \cdot (\sqrt{99}-\sqrt{98})}{(\sqrt{99}+\sqrt{98}) \cdot (\sqrt{99}-\sqrt{98})} + \frac{1 \cdot (\sqrt{100}-\sqrt{99})}{(\sqrt{100}+\sqrt{99}) \cdot (\sqrt{100}-\sqrt{99})} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} +$$

$$+ \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3} + \dots + \frac{\sqrt{99}-\sqrt{98}}{99-98} + \frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{100-99} = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \dots + \sqrt{99} - \sqrt{98} + \sqrt{100} -$$

$$- \sqrt{99} = -1 + \sqrt{100} = -1 + 10 = 9;$$

$$4) \frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-3} = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}) \cdot \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{6}}{4};$$

$$5) \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2-7} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{1+2\sqrt{15}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}) \cdot (2\sqrt{15}-1)}{(2\sqrt{15})^2-1} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7})(2\sqrt{15}-1)}{59}.$$

9. Порівняйте числа:

$$a) \sqrt{7} \text{ і } \sqrt{19} \text{ (} 7 < 19, \text{ тому) } \sqrt{7} < \sqrt{19};$$

$$б) 6 \text{ і } \sqrt{31} \text{ (} 6 = \sqrt{36}, \text{ тому) } \sqrt{36} > \sqrt{31} \Rightarrow 6 > \sqrt{31};$$

$$в) 3\sqrt{7} \text{ і } \sqrt{65} \text{ (} 3\sqrt{7} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{7}, \text{ тому) } \sqrt{63} < \sqrt{65} \Rightarrow 3\sqrt{7} < \sqrt{65}.$$

10. Спростіть вираз:

$$a) \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}; \quad б) \sqrt{(\sqrt{a}+1)^2 - 4\sqrt{a}} + \sqrt{(\sqrt{a}-2)^2 + 8\sqrt{a}}.$$

$$a) \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} = |\sqrt{5}-2| + |\sqrt{5}-3| = (\sqrt{5}-2) + (-(\sqrt{5}-3)) =$$

$$= \sqrt{5} - 2 - \sqrt{5} + 3 = -2 + 3 = 1;$$

$$б) \sqrt{(\sqrt{a}+1)^2 - 4\sqrt{a}} + \sqrt{(\sqrt{a}-2)^2 + 8\sqrt{a}} = \sqrt{a^2 + 2\sqrt{a} + 1 - 4\sqrt{a}} + \sqrt{(\sqrt{a})^2 - 4\sqrt{a} + 4 + 8\sqrt{a}} =$$

$$= \sqrt{a^2 - 2\sqrt{a} + 1} + \sqrt{a^2 + 4\sqrt{a} + 4} = \sqrt{(\sqrt{a}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{a}+2)^2} = |\sqrt{a}-1| + |\sqrt{a}+2| =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{a}-1 + \sqrt{a}+2, & \text{якщо } \alpha > 1 \\ -\sqrt{a}+1 + \sqrt{a}+2, & \text{якщо } 0 \leq \alpha \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} 2\sqrt{a}+1, & \text{якщо } \alpha > 1 \\ 3, & \text{якщо } 0 \leq \alpha \leq 1 \end{cases}$$