

Розв'язування текстових задач на рух

Задачі з розв'язками

Задача 1. Поїзд, затриманий на 12 хвилин, на перегоні завдовжки 60 км ліквідував запізнення, збільшивши швидкість на 15 км/год. Знайдіть початкову швидкість поїзда.

Розв'язання

Нехай початкова швидкість поїзда x км/год, тоді після збільшення його швидкість стала $(x + 15)$ км/год. Перегон завдовжки 60 км він мав подолати за $\frac{60}{x}$ год, а подолав за $\frac{60}{x+15}$ год.

За умовою задачі $t_1 - t_2 = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$.

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+15} = \frac{1}{5};$$

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+15} - \frac{1}{5} = 0;$$

$$\frac{300x + 4500 - 300x - x^2 - 15x}{5x(x+15)} = 0;$$

$$\frac{-x^2 - 15x + 4500}{5x(x+15)} = 0;$$

ОДЗ: $5x(x+15) \neq 0; x \neq 0, x \neq -15$.

$$x^2 + 15x - 4500 = 0;$$

$$D = 225 + 18000 = 18225; \sqrt{D} = 135;$$

$$x_1 = \frac{-15+135}{2} = 60; x_2 = \frac{-15-135}{2} = -75 \text{ — не задовольняє умову задачі.}$$

Відповідь: 60 км/год.

Задача 2. З одного міста в інше, відстань між якими 180 км, виїхали одночасно легковий і вантажний автомобілі. Швидкість легкового автомобіля на 30 км /год більша, ніж вантажного, тому він прибув до пункту призначення на 1 год раніше за вантажний. Знайти швидкість кожного автомобіля.

Розв'язання

Нехай x км/год — швидкість вантажного автомобіля, тоді $(x + 30)$ км/год — швидкість легкового автомобіля.

$\frac{180}{x}$ год — час руху вантажного автомобіля, $\frac{180}{x+30}$ год — час руху легкового автомобіля. За умовою задачі час руху легкового автомобіля на 1 год менший від часу вантажного автомобіля. Складаємо рівняння:

$$\frac{180}{x} - \frac{180}{x+30} = 1;$$

$$\frac{180}{x} - \frac{180}{x+30} - 1 = 0;$$

$$\frac{180x + 5400 - 180x - x^2 - 30x}{x(x+30)} = 0;$$

$$\frac{-x^2 - 30x + 5400}{x(x + 30)} = 0;$$

ОДЗ: $x(x + 30) \neq 0, x \neq 0, x \neq -30$.

$$-x^2 - 30x + 5400 = 0;$$

$$x^2 + 30x - 5400 = 0;$$

За теоремою, оберненою до теореми Вієта :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -30 \\ x_1 \cdot x_2 = -5400. \end{cases}$$

$x_1 = 60, x_2 = -90$ — не задовольняє умову задачі;

$$x + 30 = 60 + 30 = 90.$$

Відповідь: 60 км/год; 90 км/год.

Задача 3. З двох пунктів, відстань між якими 20 км, вийшли одночасно назустріч один одному два туристи і зустрілися через дві години. Визначте, з якою швидкістю йшов кожний турист, якщо одному на подолання всього шляху знадобилося на 1 годину 40хвилин більше, ніж іншому.

Розв'язання

Нехай x км/год — швидкість першого туриста, а y км/год — швидкість другого туриста.

Тоді $2(x + y) = 20$; а тому $(x + y) = 10$.

$\frac{20}{x}$ год — час руху першого туриста, а $\frac{20}{y}$ год — час руху другого туриста. За умовою задачі

один турист затратив на 1 год 40 хв більше, отже

$$\frac{20}{x} - \frac{20}{y} = 1\frac{2}{3}; \quad \frac{20}{x} - \frac{20}{y} = \frac{5}{3}; \quad \frac{4}{x} - \frac{4}{y} = \frac{1}{3}.$$

Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 10, \\ \frac{4}{x} - \frac{4}{y} = \frac{1}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 10 - y, \\ \frac{4}{10 - y} - \frac{4}{y} - \frac{1}{3} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 10 - y, \\ \frac{12y - 120 + 12y - 10y + y^2}{3y(10 - y)} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 10 - y, \\ \frac{y^2 + 14y - 120}{3y(10 - y)} = 0; \end{cases}$$

ОДЗ: $3y(10 - y) \neq 0; y \neq 0; y \neq 10$.

$$y^2 + 14y - 120 = 0;$$

За теоремою, оберненою до теореми Вієта :

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = -14, \\ y_1 \cdot y_2 = -120. \end{cases}$$

$y_1 = 6, y_2 = -20$ — не задовольняє умову задачі;

Отже, $x = 10 - 6 = 4$.

Відповідь: 4 км/год; 6 км/год.

Задача 4. Два пішоходи вийшли одночасно назустріч один одному і зустрілися через 3 год 20 хв. Скільки часу потрібно кожному, щоб пройти весь шлях, якщо перший прийшов в той пункт, з якого вийшов другий на 5 год пізніше, ніж другий в той пункт, звідки вийшов перший?

Розв'язання

Особливістю цієї задачі є те, що в ній немає ніяких даних про пройдений шлях. В задачах такого типу весь пройдений шлях приймається за одиницю. Нехай перший пішохід затратив на весь шлях x год, а другий y год. Тоді $\frac{1}{x}$ —

швидкість першого, а $\frac{1}{y}$ — швидкість другого пішохода. За умовою задачі складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} + 3\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{y} = 1; \\ x - y = 5; \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{10}; \\ x = y + 5; \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{y+5} + \frac{1}{y} - \frac{3}{10} = 0; \\ x = y + 5; \end{cases} \begin{cases} \frac{10y+10y+50-3y^2-15y}{10y(y+5)} = 0; \\ x = y + 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{-3y^2 + 5y + 50}{10y(y+5)} = 0; \\ x = y + 5; \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } 10y(y+5) \neq 0; y \neq 0; y \neq -5;$$

$$3y^2 - 5y - 50 = 0;$$

$$D = 25 + 4 \cdot 3 \cdot 50 = 625; \sqrt{D} = 25;$$

$$y_1 = \frac{5+25}{6} = 5; \quad y_2 = \frac{5-25}{6} = \frac{-20}{6} = \frac{-10}{3} = -3\frac{1}{3} \text{ — не задовольняє умову задачі;}$$

$$x_1 = 5 + 5 = 10.$$

Відповідь: 10 год і 5 год.

Задача 5. Моторний човен проплив 30 км за течією річки і 8 км проти течії річки, витративши на весь шлях 5 годин. Знайти власну швидкість човна, якщо швидкість течії річки 3 км/год.

Розв'язання

Нехай x км/год — власна швидкість човна, тоді $(x+3)$ км/год — швидкість човна за течією, а $(x-3)$ км/год — швидкість човна проти течії;

$\frac{30}{x+3}$ год — час руху човна за течією, а $\frac{8}{x-3}$ год — час руху човна проти течії. За умовою задачі човен витратив на весь шлях 5 год. Складаємо рівняння:

$$\frac{30}{x+3} + \frac{8}{x-3} = 5;$$

$$\frac{30}{x+3} + \frac{8}{x-3} - 5 = 0;$$

$$\frac{30x - 90 + 8x + 24 - 5x^2 + 45}{(x+3)(x-3)} = 0;$$

$$\frac{-5x^2 + 38x - 21}{(x + 3)(x - 3)} = 0;$$

ОДЗ: $(x + 3)(x - 3) \neq 0; x \neq 3; x \neq -3$.

$$-5x^2 + 38x - 21 = 0;$$

$$5x^2 - 38x + 21 = 0;$$

$$D = 1444 - 4 \cdot 5 \cdot 21 = 1024 > 0.$$

$x_1 = \frac{38-32}{10} = 0,6$ – не задовольняє умову задачі;

$$x_2 = \frac{38 + 32}{10} = 7.$$

Відповідь: 7 км/год.

Задача 6. Турист на моторному човні, власна швидкість якого 15 км/год, проплив проти течії річки 27 км і повернувся назад на плоту. Знайдіть швидкість течії річки, якщо на плоту турист плив на 6 год 40 хв довше, ніж на човні.

Розв'язання

Нехай x км/год – власна швидкість течії річки, тоді

$(15 - x)$ км/год – швидкість човна проти течії річки; $\frac{27}{x}$ год – час руху плота, а

$\frac{27}{15-x}$ год – час руху човна. За умовою задачі турист на плоту плив на 6 год 45 хв = $6\frac{3}{4}$ год.

довше, ніж на човні. Складаємо рівняння:

$$\frac{27}{x} - \frac{27}{15-x} = 6\frac{3}{4};$$

$$\frac{27}{x} - \frac{27}{15-x} - \frac{27}{4} = 0;$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{15-x} - \frac{1}{4} = 0;$$

$$\frac{4(15-x) - 4x - x(15-x)}{4x(15-x)} = 0;$$

$$\frac{60 - 23x + x^2}{4x(15-x)} = 0;$$

ОДЗ: $4x(15-x) \neq 0; x \neq 0, x \neq 15$.

$$x^2 - 23x + 60 = 0;$$

За теоремою, оберненою до теореми Вієта :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 23 \\ x_1 \cdot x_2 = 60; \end{cases}$$

$x_1 = 3, x_2 = 20$ – не задовольняє умову задачі;

Відповідь: 3 км/год.

Задача 7. Катер пройшов 48 км по озеру, а потім 22 км по річці, що впадає в це озеро, за 3 год. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки 2 км/год.

Розв'язання

Нехай x км/год – власна швидкість катера, тоді

$(x - 2)$ км/год – швидкість катера проти течії річки.

$\frac{48}{x}$ год – час руху катера по озеру, а $\frac{22}{x-2}$ год – час руху катера по річці. За умовою задачі

катер витратив на весь шлях 3 години. Складаємо рівняння:

$$\frac{48}{x} + \frac{22}{x-2} = 3;$$

$$\frac{48}{x} + \frac{22}{x-2} - 3 = 0;$$

$$\frac{48x - 96 + 22x - 3x^2 + 6x}{x(x-2)} = 0;$$

$$\frac{-3x^2 + 76x - 96}{x(x-2)} = 0;$$

$$\frac{3x^2 - 76x + 96}{x(x-2)} = 0;$$

ОДЗ: $x(x-2) \neq 0$; $x \neq 0$; $x \neq 2$;

$$3x^2 - 76x + 96 = 0;$$

$$D = 15776 - 4 \cdot 3 \cdot 96 = 4624; \quad \sqrt{D} = 68;$$

$$x_1 = \frac{76-68}{6} = 1\frac{1}{3} \text{ – не задовольняє умові задачі.}$$

$$x_2 = \frac{76+68}{6} = 24.$$

Відповідь: 24 км/год.

Задача 8. Моторний човен проплив за течією річки 18 км і повернувся назад, затративши на весь шлях 1 годину 45 хвилин. Знайти власну швидкість човна і швидкість течії, якщо відомо, що 6 км за течією човен пропливає на 5 хвилин швидше, ніж проти течії.

Розв'язання

Нехай x км/год – власна швидкість човна, а y км/год – швидкість течії. Тоді $(x + y)$ км/год – швидкість човна за течією, а $(x - y)$ км/год – швидкість човна проти течії.

$\frac{1}{x+y}$ год і $\frac{1}{x-y}$ год – час, затрачений на 1 км за течією і проти течії річки відповідно.

$$\text{Складаємо систему рівнянь: } \begin{cases} \frac{18}{x+y} + \frac{18}{x-y} = 1\frac{3}{4}, \\ \frac{6}{x-y} - \frac{6}{x+y} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}, \end{cases}$$

$$\text{Нехай } \frac{1}{x+y} = a, \quad \frac{1}{x-y} = b, \text{ тоді } \begin{cases} 18a + 18b = \frac{7}{4}, \\ 6b - 6a = \frac{1}{12}. \end{cases} \begin{cases} 18(a+b) = \frac{7}{4}, \\ 6(b-a) = \frac{1}{12}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = \frac{7}{72}, \\ b - a = \frac{1}{72}; \end{cases} 2b = \frac{8}{72} = \frac{1}{9}; \quad b = \frac{1}{18}; \text{ тоді } a = \frac{1}{24}.$$

Вертаємось до заміни: $\begin{cases} x + y = 24, \\ x - y = 18; \end{cases} \begin{cases} x = 21, \\ y = 3. \end{cases}$

Відповідь: 21 км/год; 3 км/год .