

## Приклади роз'язування задач

### Задача 1

1.1 Швидкість руху тіла задана рівнянням  $v = 20 - 2t$ . Визначити характер руху тіла.

Порівнюючи дані рівняння з теоретичним  $v_x = v_{0x} + a_x t$ , одержуємо, що  $v_{0x}$  та  $a_x$  мають протилежні знаки, а це означає, що рух сповільнений.

1.2 Визначити переміщення тіла за 5с руху.

Для визначення переміщення потрібно записати рівняння проекції переміщення  $s_x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$  і конкретизувати його в даному випадку, підставивши значення  $v_{0x}$  та  $a_x$ :  $s_x = 20t - t^2$ .

Тоді проекція переміщення за 5с руху буде дорівнювати

$$s_x = 20 \frac{м}{с} \times 5с - 1 \frac{м}{с^2} \times 25с^2 = 75м, \text{ тобто } s = 75м.$$

1.3 Яке переміщення тіло здійснить за п'яту секунду руху?

Якщо позначити переміщення за 5-ту секунду  $\Delta s$ , то його можна обчислити за формулою  $\Delta s = s_5 - s_4$ , де  $s_5, s_4$  - це переміщення, здійснені тілом відповідно за 5 та 4 секунди руху.  $s_5 = 75м$ , а  $s_4 = 20 \frac{м}{с} \times 4с - 1 \frac{м}{с^2} \times 16с^2 = 64м$

$$\text{Тоді } \Delta s = 75м - 64м = 11м$$

1.4 Визначити час руху тіла до зупинки.

Цей момент часу відповідає значенню  $v = 0$ :

$$20 - 2t = 0, t = 10с$$

1.5 Побудувати графік руху, якщо в початковий момент тіло було в точці з координатою  $-50$  м.

Графік руху відповідатиме рівнянню  $x = -50 + 20t - t^2$ . Це буде гілка параболи.

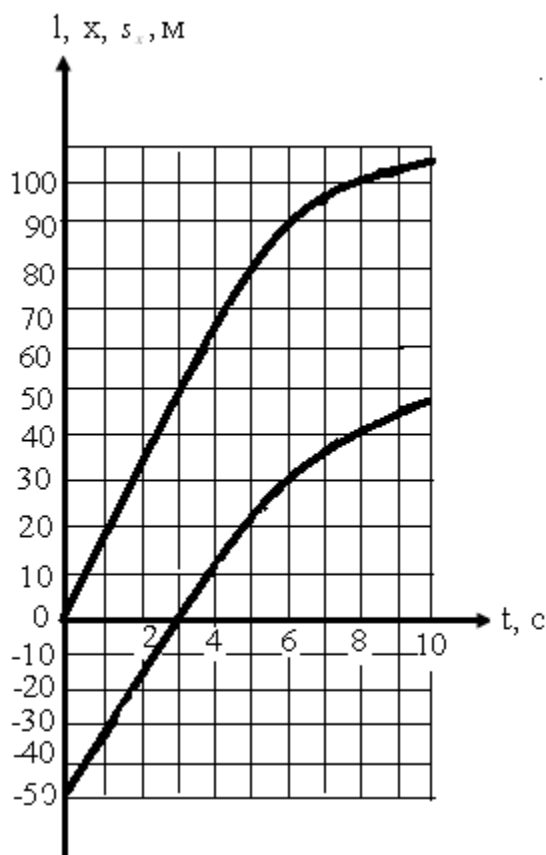
Початок її відповідатиме моменту часу, тоді  $x_0 = -50м$ , а другою характерною точкою буде положення вершини параболи, що відповідає моменту часу, коли  $v = 0$  під час сповільненого руху, тобто  $t = 10с$ :

$$x_0 = -50\text{ м} + 20 \frac{\text{м}}{\text{с}} \times 10\text{ с} - 1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \times 100\text{ с}^2 = 50\text{ м}$$

Для більш точної побудови можна знайти ще одну характерну точку, що відповідає моменту проходження тілом координати  $x = 0$ :

$$0 = -50 + 20t - t^2$$

Розв'язавши відносно  $t$  рівняння  $t^2 - 20t + 50 = 0$ , одержимо два значення часу - 17с та 3с. Зрозуміло, що нас влаштовує другий результат, оскільки весь час руху тіла до зупинки 10с.



Малюнок 1

За визначеними точками будуємо графік руху тіла, крива  $x(t)$ .

1.6 Побудувати графік переміщення пройденого шляху.

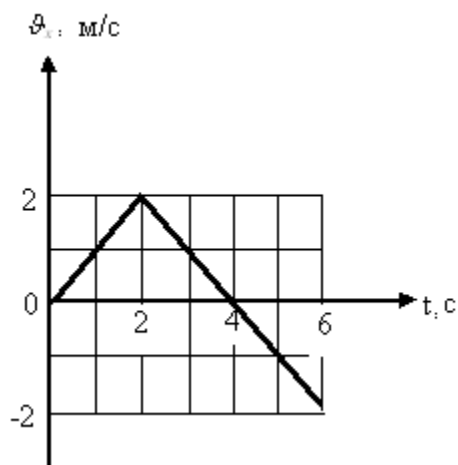
У даній задачі тіло не змінювало напрямку руху на протилежний, тому графіки переміщення та шляху будуть збігатися.

Графік проекції переміщення є графічним втіленням рівняння  $s_x = 20t - t^2$ .

При  $t = 0$   $s_x = 0$ , а при  $t = 10\text{ с}$   $s_x = 100\text{ м}$ , тобто графіком переміщення та шляху буде гілка параболи (малюнок 1).

## Задача 2

Дано графік залежності проекції швидкості від часу (малюнок 2) для матеріальної точки, яка в момент часу  $t_0 = 0$  почала рухатись, маючи  $x_0 = 0$ .



Малюнок 2

2.1 Визначити середню шляхову швидкість за 4с руху.

В інтервалі часу від 0 до 2с тіло рухалось прискорено (швидкість із плином часу зростала), а від 2 до 4с – сповільнено (швидкість із плином часу зменшувалася). Шлях дорівнює модулю переміщення, якщо тіло не змінює напрямку руху  $l = l_1 + l_2 = s_1 + s_2$ :

$$s_x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Для інтервалу часу від 0 до 2с

$$v_{0x} = 0, \quad a_x = \frac{v - v_0}{t}, \quad a_{x1} = \frac{2\frac{M}{c} - 0}{2c} = 1\frac{M}{c^2}, \quad s_{x1} = \frac{a_x t^2}{2}, \quad s_{x1} = \frac{1\frac{M}{c^2} \times 4c^2}{2} = 2M$$

.

$$\text{Для інтервалу часу від 2 до 4с} \quad v_{0x} = 2\frac{M}{c}, \quad a_{x2} = \frac{0 - 2\frac{M}{c}}{2c} = -1\frac{M}{c^2},$$

$$s_{x2} = -\frac{1\frac{M}{c^2} \times 4c^2}{2} = -2M.$$

$$\text{Пройдений шлях } l = 4M, \text{ тоді } v_{cp} = \frac{4M}{4c} = 1\frac{M}{c}$$

2.2 Накреслити графік проекції переміщення та пройденого шляху за 6с

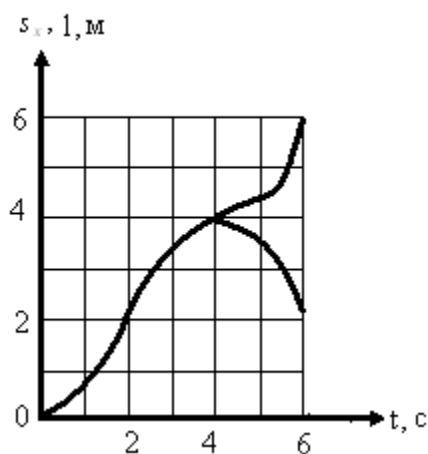
руху. Графіком  $s_x(t)$  буде парабола, гілка якої напрямлена вгору ( $a_x > 0$ ) (малюнок 3).

$$t = 0 \quad s_x = 0;$$

$$t = 2c \quad s_x = 2M$$

На ділянці від 2 до 4с гілки параболи напрямлені донизу ( $a_x < 0$ ).

При  $t = 4c$ ,  $v_x = 0$  тіло змінює



Малюнок 3

напряму руху – в цій точці міститься вершина параболи (малюнок 3);

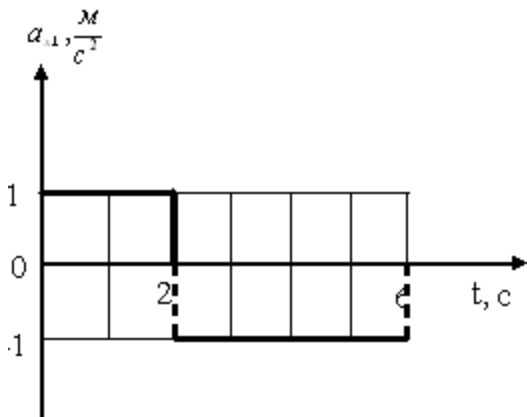
$s_x$  у цьому інтервалі описується рівнянням  $s_x = 2t - \frac{t^2}{2}$ ,

$$s_{x2} = 2 \frac{M}{c} \times 2c - 1 \frac{M}{c^2} \times \frac{4}{2} c^2 = 4M - 2M = 2M.$$

Загальне переміщення на момент  $t = 4c$  дорівнює алгебраїчній сумі переміщення на інтервалі  $0 - 2$  та  $2 - 4c$ :

$$s'_x = s_{x1} + s_{x2}, \quad s'_x = 4M \text{ (це і буде вершина параболи)}.$$

На ділянці від  $4$  до  $6c$  рівняння проекції переміщення має вигляд  $s_x = -\frac{t^2}{2}$ . Проекція переміщення за цей час  $s_{x3} = -2M$ .



Малюнок 4

Загальне значення переміщення за  $6c$  становить  $s_x = 4M - 2M = 2M$ .

Пройдений шлях з урахуванням зміни напрямку руху дорівнює

$$l = |s_{x1}| + |s_{x2}| + |s_{x3}|, \quad l = 6M.$$

2.3 побудувати графік проекції прискорення точки.

Для інтервалів  $0 - 2$  та  $2 - 4c$  проекція прискорення  $a_x$  визначена.

Для інтервалів  $4 - 6c$  становить

$$a_{x3} = \frac{-2 \frac{M}{c} - 0}{2c} = -1 \frac{M}{c^2} \text{ (малюнок 4)}.$$

### Задача 3

На малюнку 5 показано графік залежності проекції швидкості  $v_x$  від часу для частинки, яка рухається прямолінійно вздовж осі. Початкова координата частинки  $x_0 = 0$ .

1. Знайти за графіком початкову швидкість, прискорення частинки і записати рівняння, яке виражає залежність швидкості від часу.

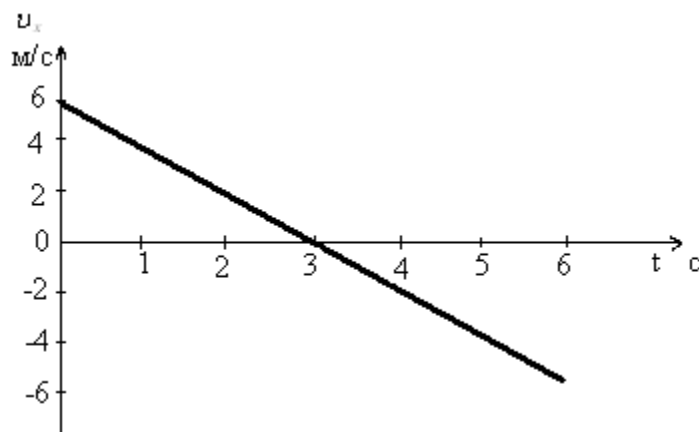
2.Знайти закон руху частинки (рівняння, яке виражає залежність її координати від часу); початкову координату вважати нульовою.

3.Побудувати графік залежностей координати частинки і шляху, пройденого нею, від часу.

4.Обчислити координату і момент  $t = 5\text{с}$ , а також шлях, пройдений нею за перші 5с руху.

### **Розв'язання:**

1.З графіка залежності  $v_x(t)$  на малюнку 5 видно, що в початковий момент проекції швидкості додатна:  $v_0 = 6\text{ м/с}$ ; з плином часу модуль швидкості зменшується. Отже, частинка рухається в додатному напрямі осі



Малюнок 5

рівносповільнено. У цьому випадку вектор прискорення напрямлений протилежно вектору швидкості і проекції прискорення є від'ємною.

Проекцію прискорення можна обчислити за формулою

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} \quad \text{якщо,}$$

користуючись графіком ( малюнок 5), вибрати довільний проміжок часу і знайти відповідні значення швидкості на початку і в кінці цього проміжку.

Наприклад, для моменту  $t_0 = 0$  проекція  $v_{0x} = 6\text{ м/с}$ , а для  $t = 3\text{с}$   $v_x = 0$ . Отже

$$a_x = \frac{0 - 6\text{ м/с}}{3\text{с}} = -2\text{ м/с}^2.$$

Тепер можна записати залежність проекції швидкості від часу:

$$v_1 = v_{0x} + a_x t \quad \text{або} \quad v_x = 6\text{ м/с} - 2\text{ м/с}^2 t \quad (1)$$

Графік зміни швидкості, що відповідає формулі (1), є прямою малюнку

5. У будь – який момент часу проекція прискорення є сталою:

$$a_x = -2\text{ м/с}^2 = \text{const}.$$

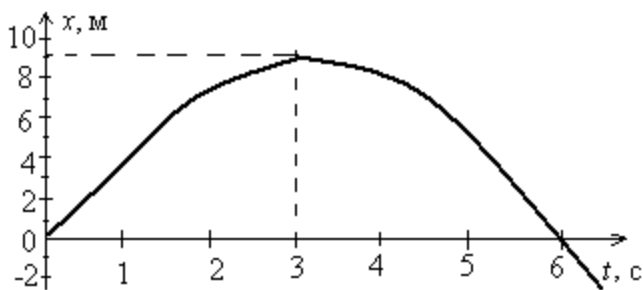
2. Залежність координати від часу для рівноприскореного руху має вигляд

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Підставляючи числові значення  $x_0, v_{0x}, a_x$ , маємо

$$x = 6 \frac{\text{м}}{\text{с}} t - 1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} t^2. \quad (2)$$

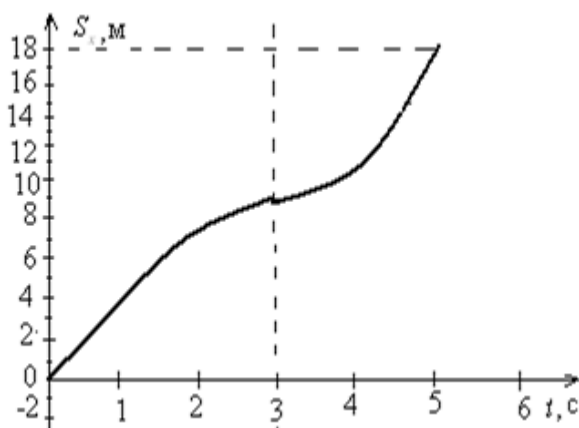
3. Графік залежності координати від часу, вираженим рівнянням (2) є парабола малюнка 6. З графіка видно, що з початку руху і до моменту  $t = 3\text{с}$  координата частинки зростає, а для  $t > 3\text{с}$  - зменшується. Це означає, що в момент  $t = 3\text{с}$  частинка змінює напрям свого руху на протилежний (такий самий висновок можна зробити з малюнку 6, оскільки при  $t = 0$  знак проекції



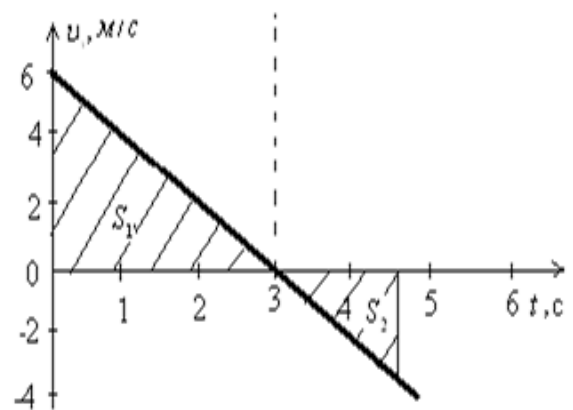
Малюнок 6

$v_x$  змінюється з плюса на мінус, що свідчить про зміну напрямку швидкості). Тепер з'ясуємо, як змінюється із часом значення

шляху, пройденого частинкою, і побудуємо графік шляху.



Малюнок 7



Малюнок 8

Очевидно, що для  $0 < t \leq 3\text{с}$  напрям швидкості і переміщення збігаються, тому пройдений шлях  $s$  буде чисельно дорівнювати значенню координати  $x$ . Тому і графік  $s(t)$  малюнок 7 для  $t \leq 3\text{с}$  збігається з графіком  $x(t)$ . Для часу

$t > 3c$  графік  $s(t)$  продовжуватиме йти вгору, тому, що під час руху незалежно від напрямку руху шлях завжди зростає. Ділянку графіка  $s(t)$  для  $t > 3c$  можна побудувати, якщо дзеркально відобразити відповідну ділянку графіка  $x(t)$  відносно горизонтальної прямої  $x = 9$  (на малюнку 8 ділянку прямої  $x = 9$  зображено пунктиром).

Координату частинки  $x_1$  у момент  $t_1 = 5c$  знаходимо з рівняння (2) :

$$x = 6 \frac{m}{c} 5c - 1 \frac{m}{c^2} (5c)^2 = 5m.$$

Шлях пройдемо, якщо до  $S_1$ , пройденого частинкою вправо, додамо шлях  $S_2$ , пройдений у зворотному напрямі.

Оскільки вправо частинка рухається з часом  $t_1 = 3c$ , то

$$S_1 = x_1 = 6m/c \cdot t_1 m/c^2 \cdot t_1^2 = 6m/c \cdot 3c - 9m = 9m$$

У початковий момент  $t = 3c$ , коли частинка починає рух у зворотному напрямі, її початкова швидкість дорівнює нулю; отже, шлях

$$S_2 = \frac{a_2 t^2}{2},$$

де  $a_2 = a_1 = 2m/c$ , а відлік часу відраховується з моменту  $t = 3c$ .

Повний час руху частинки  $t = 5c$ , час руху вправо  $t_1' = 3c$ , час руху в зворотному напрямі  $t_2' = 2c$ . Отже, шлях, пройдений у від'ємному напрямі осі  $Ox$ ,

$$S_2 = \frac{a^2 (t_2')^2}{2} = \frac{2m/c^2 \cdot (2c)^2}{2} = 4m.$$

Повний шлях за  $5c$  руху  $s = s_1 + s_2 = 9m + 4m = 13m$ .

Зауважимо, що повний шлях  $s$  можна знайти з графіка  $v_\delta(t)$ , який для зручності побудовано внизу під графіками  $x(t), s(t)$ , (малюнок 6,7). З малюнка 8 видно, що шлях за  $t_1 = 3c$  чисельно дорівнює площі заштрихованого трикутника  $s_1$ , який лежить під графіком швидкості на інтервалі від  $t = 0$

до  $t_1 = 3c$ .

Шлях  $s_2$  чисельно дорівнює площі трикутника  $s_2$ , який розміщено над графіком швидкості від моменту часу  $t_1 = 3\text{с}$  до моменту часу  $t = 5\text{с}$ . Очевидно, що площі прямокутних трикутників дорівнюють:

$$s_1 = \frac{6\text{м/с} \cdot 3\text{с}}{2} = 9\text{м};$$

$$s_2 = \frac{4\text{м/с} \cdot 2\text{с}}{2} = 4\text{м}$$

Отже,  $s = s_1 + s_2 = 13\text{м}$ .

### Задача 4

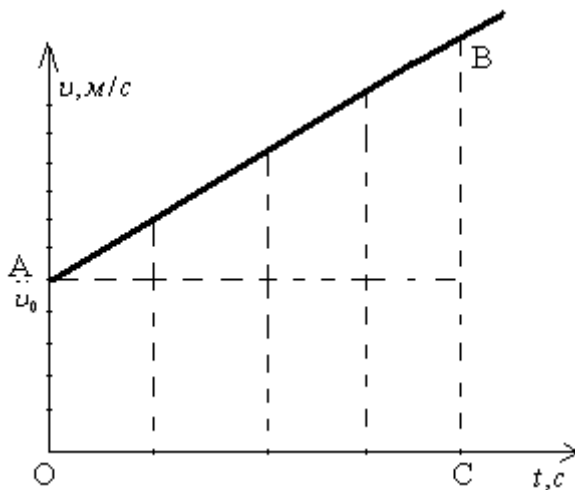
Побудувати графік швидкості для руху, рівняння якого  $s = 5t + t^2$ . За цим графіком визначити шлях, який проходить тіло за 4с від початку руху. Правильність знайденого результату перевірити обчисленням значення шляху за рівнянням руху.

#### **Розв'язання**

У загальному випадку рівняння прискореного руху записують так:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}, \text{ де } s - \text{пройдений шлях; } v_0 - \text{початкова швидкість руху тіла;}$$

$a$  – прискорення руху тіла;  $t$  – час руху.



Малюнок 9

З рівняння руху, поданого в задачі, можна знайти початкову швидкість руху тіла ( $v_0 = 5\text{м/с}$ ) та прискорення ( $a = 2\text{м/с}^2$ ). За цими даними можна побудувати графік швидкості руху тіла (малюнок 9).

За графіком швидкості можна знайти пройдений тілом шлях: він дорівнює площі фігури ОАВС. Ця площа дорівнює 36 кв. одиниць. Отже, шлях, пройдений тілом за 4с, становить 36 м.;

Перевірити правильність знайденого результату можна за допомогою рівняння руху:

$$s = 5 \frac{m}{c} \cdot 4c + \frac{2 \frac{m}{c^2} \cdot 16c}{2} = 36m.$$