

Метод екстремуму потенціальної енергії

Говорячи про варіаційні принципи механіки, необхідно звернути увагу на «Трактат по динаміці» Д'аламбера (1743 р.). в ньому викладені три принципи механіки.

1. Принцип сили інерції.

Д'аламбер поряд з Галілеєм і Ньютоном визнає за тілами властивість зберігати той стан, в якому вони знаходяться.

2. Принцип додавання рухів.

Це узагальнення дослідних даних – принцип суперпозиції рухів. З нього очевидні, наприклад, паралелограми швидкостей та сил. Перші два принципи детально розглянуті у шкільному курсі фізики.

3. Принцип рівноваги.

Д'аламбер наслідує Мортюї, який у 1740 році довів, що в рівновазі системи екстремальна величина «сума сил спокою». Що ж це за величина?

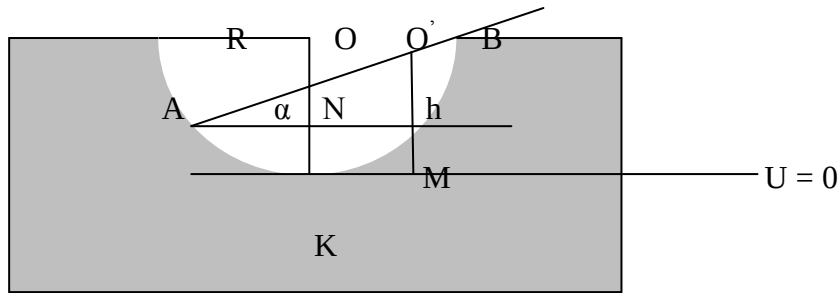
Для рівноваги системи необхідна стаціонарність її потенціальної енергії. це означає, що при малих відхиленнях системи зміна U незначна. Нижче буде доведено, що умовою рівноваги являється екстремум потенціальної енергії. якщо в системі діють дисипативні сили (сили рідкого тертя, наприклад), то і при їх наявності умова рівноваги – стаціонарність (екстремум) – виконується, так як у положенні рівноваги ($v = 0$) дисипативні сили рівні нулю.

Якщо система обмежена ідеальними зв'язками, що не виконують роботу при будь-яких віртуальних переміщеннях, то стаціонарність U , $U_{\min}$ і $U_{\max}$ відповідають рівновазі, стійкій і нестійкій.

Нехай тіло знаходиться у полі консервативних сил. Кожній точці такого поля ставиться у відповідність сила. Такі поля називаються потенціальними. Робота консервативних сил по замкнутому контуру рівна нулю, не залежить від форми шляху і рівна спаду потенціальної енергії. при переміщенні тіла на малу відстань dx сила F_x здійснює роботу $F_x dx$. Зрозуміло, що $F_x = \frac{dU}{dx}$. Оскільки у положенні рівноваги $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$, то $\frac{dU}{dx} = 0$, тобто є потенціальна енергія екстремальна.

Для рішення задач на знаходження умови рівноваги системи необхідно знайти вираз для потенціальної енергії, про диференціювати його і, прирівнявши до нуля, розв'язати відносно невідомого.

Задача 1. Гладкий однорідний стержень довжиною $2L$ опирається на край гладкої, нерухомої півсферної чаші радіусом R . Який кут α утворює стержень з горизонтом у положенні рівноваги? Тертям знехтувати.



Оберем за нульовий рівень U горизонталь, що проходить через K . відстань від центра тяжіння до цієї прямої

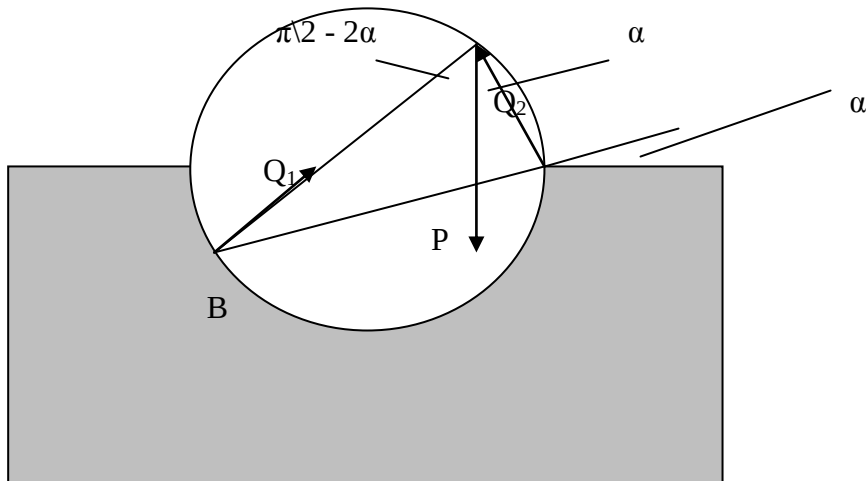
$$h = R(1 - \sin 2\alpha) + L \sin \alpha.$$

У положенні рівноваги $\frac{dU}{d\alpha} = 0$

$$4R^2 \cos \alpha - L \cos \alpha - 2R = 0, \text{ звідки}$$

$$\alpha = \arccos \left[\frac{1}{8R} (L + \sqrt{L^2 + 32R^2}) \right]$$

Корінь один, так як α – кут гострий. Покажемо також традиційний розв’язок задачі.



На стержень діють три сили: сила тяжіння mg . Прикладена до середини стержня. І сили реакції чаші Q_1 і Q_2 . Так як тертя відсутнє. Сила Q_1 , що діє на кінець стержня. Що упирається у чаші. Направлена перпендикулярно поверхні чаші, тобто по радіусу; сила Q_2 прикладена до стержня з боку краю чашки і напрямлена перпендикулярно стержню. Якщо стержень знаходиться у положенні рівноваги, то лінії, по яких діють ці сили, перетинаються в одній точці A . дійсно, розглянемо точку перетину лінії дії яких-небудь двох сил, наприклад, Q_2 і Q_1 , і складемо умову рівноваги нулю суми моментів всіх сил відносно цієї точки. Моменти сил Q_2 і Q_1 відносно точки перетину їх напрямків рівний нулю, тобто момент сили P також повинен бути рівний нулю – лінія дії сили P проходить

через цю ж точку. Цього факту достатньо для знаходження положення рівноваги стержня. Через елементарні геометричні міркування легко знайти всі кути, вказані на малюнку. Тепер можна скласти рівняння для будь-якої тригонометричної функції шуканого кута α . Знаходячи з прямокутного трикутника ABC хорду $BC = 2R \cos \alpha$ і враховуючи, що точка прикладання сили тяжіння лежить посередині стержня, отримаємо $x = 2R \cos \alpha - L$.

Далі, розглянувши радіус OC як суму двох відрізків, на які його ділить лінія дії сили тяжіння P, знаходимо

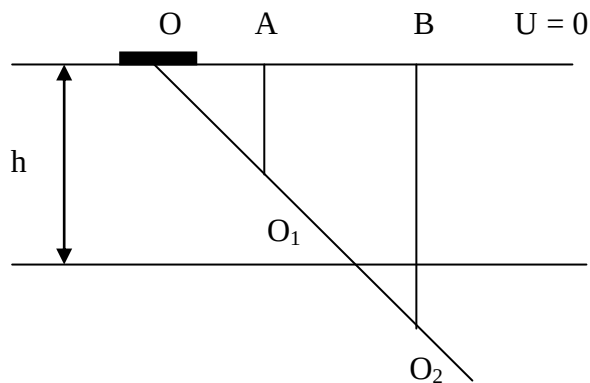
$$R = R \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) + x \cos \alpha$$

Підставивши, отримуємо після простих перетворень квадратне рівняння для $\cos \alpha$:

$$4R \cos^2 \alpha - L \cos \alpha - 2R = 0$$

Рівновага систем, в яких робота зв'язку визначається змінами потенціальної енергії, також описується умовою екстремуму. Приклад цьому – рівновага тіла у рідині. Найдемо потенціальну енергію тіла, зануреного у рідину. Нехай тіло масою m та об'ємом V переміщується всередині рідини густини ρ на $\Delta h = h_1 - h_2$. Робота сили тяжіння $A_1 = mg \Delta h$, архімедова сила $A_2 = -\rho g V \Delta h$. Сумарна робота $A = A_1 + A_2 = (m - \rho V)gh_1 - (m - \rho V)gh_2$ рівна спаду потенціальної енергії $A = U_1 - U_2$. Отже, $U = (m - \rho V)gh$.

Задача 2. Однорідна тонка паличка шарнірно укріплена за верхній кінець. Нижня частина її занурена у воду, причому рівновага досягається тоді, коли вона розташована під кутом до поверхні води і у воді знаходиться її половина. Яка густина матеріалу палички?

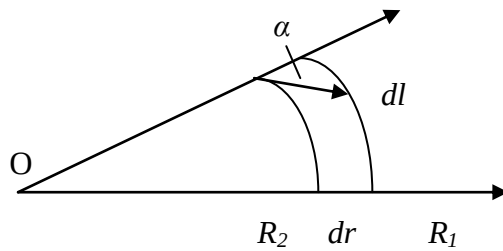


За нульовий рівень U виберемо горизонталь через O . потенціальна енергія надводної частини палички $U_1 = -\frac{\rho V}{2} g \frac{h}{2}$, а підводної – $U = \left(\frac{\rho g V}{2} - \frac{g V \rho_b}{2}\right) \frac{3}{2} h$. умова рівноваги палички $\frac{d(U_1 + U_2)}{dh} = 0$, звідки $\rho = \frac{3}{4} \rho_b$.

Консервативними можуть бути не тільки природні сили, але і фіктивні. Це означає, що про поле центр обіжних сил інерції можна говорити як про потенціальне. Нехай тіло масою m обертається навколо точки O з постійною кутовою швидкістю ω на відстані r від центра обертання. В неінерціальній системі відліку на нього діє доцентрова сила інерції, направлена вздовж радіусу від центра обертання і дорівнює $F = m\omega^2 r$. нехай тіло

перемістилось на малу відстань dl , в межах якого F стаціонарна. Робота цієї сили $dA = m\omega^2 r dl \cos\alpha$.

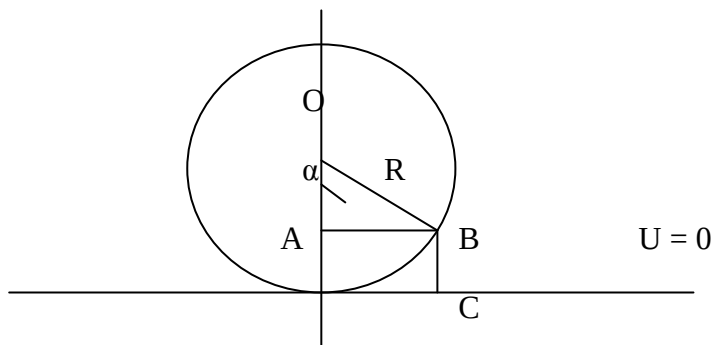
Але $dl \cos\alpha = dr$.



Тому

$$A = \int_{R_2}^{R_1} m\omega^2 r dr = \frac{1}{2} m\omega^2 r_2^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 r_1^2, \text{ звідки } U = -\frac{1}{2} m\omega^2 r^2.$$

Задача 3. На гладке проволочене кільце радіуса R надітий маленький шар масою m . Кільце разом з шаром обертається навколо вертикальної осі, що проходить через діаметр кільця з кутовою швидкістю ω . Де знаходиться шар?



За нульовий рівень U приймемо нижню точку кільця. Тоді потенціальна енергія шара в полі тяжіння $U_1 = mgR(1 - \cos\alpha)$, а потенціальна енергія в полі доцентрових сил інерції $U_2 = -\frac{1}{2} m\omega^2 R^2 \sin^2 \alpha$. Але в положенні рівноваги шара $\frac{d(U_1 + U_2)}{d\alpha} = 0$. Тому при $\omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$, $\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 R}$, при $\omega \leq \sqrt{\frac{g}{R}}$, $\alpha = 0$.

Екстремум енергії обумовлює рівновагу систем, що зазнають впливу одночасно декількох взаємодій. Нагадаємо, що потенціальна енергія пружної деформації $U = \frac{kx^2}{2}$, потенціальна енергія заряду q у полі заряду Q $U = \frac{Qq}{4\pi r \epsilon \epsilon_0}$, енергія вільної поверхні рідини $U = \sigma S$.

Задача 4. Тонке гумове кільце масою m і радіусом R_0 розкрутили навколо його осі до кутової швидкості ω . Знайдіть новий радіус кільця, якщо жорсткість пружини k .

Нехай R – новий радіус кільця. Тоді $x = 2\pi(R - R_0)$ і $U_1 = \frac{4k\pi^2}{2} (R - R_0)^2$ потенціальна енергія кільця у полі доцентрових сил $U_2 = -\frac{1}{2} m\omega^2 R^2$. Тому з $\frac{d(U_1 + U_2)}{dR} = 0$ отримаємо $R = \frac{4\pi^2 k^2}{4\pi^2 k^2 - m\omega^2} R_0$

Задача 5. Металічний ланцюг довжиною L і масою m , кінці якої з'єднані, насаджена на дерев'яний диск, що обертається з частотою ν . Визначте силу натягу ланцюга.

$$U_1 = \frac{4\pi^2 k (R - R_0)^2}{2}$$

$$U_2 = -\frac{1}{2} m\omega^2 R^2$$

З рівняння $\frac{d(U_1 + U_2)}{dR} = 0$ отримаємо $4\pi^2 k (R - R_0) = m\omega^2 R$. враховуючи, що $T = 2\pi k (R - R_0)$, $L = 2\pi R_0$ і $\omega = 2\pi\nu$, маємо $T = mL\nu^2$