

Варіаційні принципи механіки. Метод віртуальних переміщень.

Основна задача механіки полягає у визначенні в будь-який момент часу параметрів, що характеризують стан рухомої системи. Поряд з іншими способами опису (графічний, табличний і т. д.) найбільш широке застосування отримав аналітичний.

В основі механіки лежать *принципи*. Це положення, які відображають загальні закономірності механічних явищ, з яких можна отримати рівняння руху. Розрізняють варіаційні та неваріаційні принципи механіки. Їх поява пов'язана з іменами Ньютона, Д'аламбера, Лагранжа, Мопертюї, Бернуллі.

Неваріаційні принципи механіки встановлюють закономірності руху, що здійснює система під дією прикладених сил. Це, наприклад, відомий другий закон Ньютона. Але в механіці принципово можливі два шляхи опису процесів: силовий (неваріаційний) та енергетичний.

Шляхи силового опису обмежені тим, що не завжди в задачі відомі або очевидні всі сили взаємодії, наприклад сили реакції (натяг нитки, реакції площини). Іншим недоліком являється наявність великого числа рівнянь, що ускладнює розв'язок. Енергетичний підхід (варіаційні принципи) має ті переваги, що рівняння руху не містять невідомих реакцій зв'язку і дають не громіздке, а іноді й граційне розв'язання.

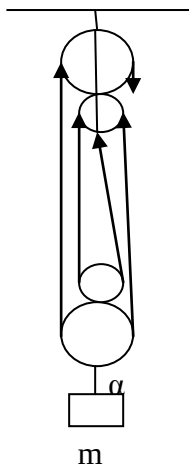
Варіаційні принципи механіки в свою чергу поділяються на диференціальні та інтегральні. Нижче ми розглянемо в якості диференціального – метод віртуальних переміщень, інтегральних – наслідки з принципу найменшої дії (екстремум енергії).

У 1717 році Йоганн Бернуллі в листі Варіньону описав новий спосіб розв'язку статичних задач. В основі цього способу лежить властивість сил реакції зв'язку, повна робота яких при малому відхиленні системи від положення рівноваги рівна нулю.

Ця властивість сил реакції пов'язана з законом збереження енергії: підтримка зв'язку в положенні рівноваги не потребує трати енергії (сили реакції прикладені, немає зміщення точок системи). Зазначимо, що в положенні рівноваги на точки системи діють, окрім сил реакції, і зовнішні сили, які вагомо впливають на сили реакції. При нескінченно малому відхиленні системи від положення рівноваги робота зовнішніх сил буде невід'ємною, тобто $A_{\text{зовн.}} \geq 0$. Аналогічно, при від'ємному відхиленні $A_{\text{зовн.}} \leq 0$. Оскільки для системи принципово можливі і позитивні і негативні відхилення, то їх єдність у протилежностях виражається умовою $A_{\text{зовн.}} = 0$.

Формулювання принципу. Для рівноваги будь-якої механічної системи з ідеальними зв'язками необхідно і достатньо, щоб сума елементарних робіт, діючих на систему сил при будь-якому віртуальному переміщенні, рівна нулю.

Задача 1 (Лагранжа). В системі, зображеній на малюнку, до нижнього блоку підвішений вантаж масою m . Яку мінімальну силу необхідно прикласти до вільного кінця нитки, щоб утримати систему в рівновазі? Нитки нерозтяжні, блоки невагомі. Нитки між блоками вважати паралельними.



Нехай точка прикладання сил переміщується вертикально вниз на відстань δH (δ – позначення приросту по Лагранжу). При цьому вантаж m переміститься вгору на відстань $\delta h = \frac{1}{4} \delta H$.

$$\delta A_1 + \delta A_2 = 0; \quad F \delta H - mg \delta h = 0; \quad \rightarrow F = \frac{mg}{4}$$

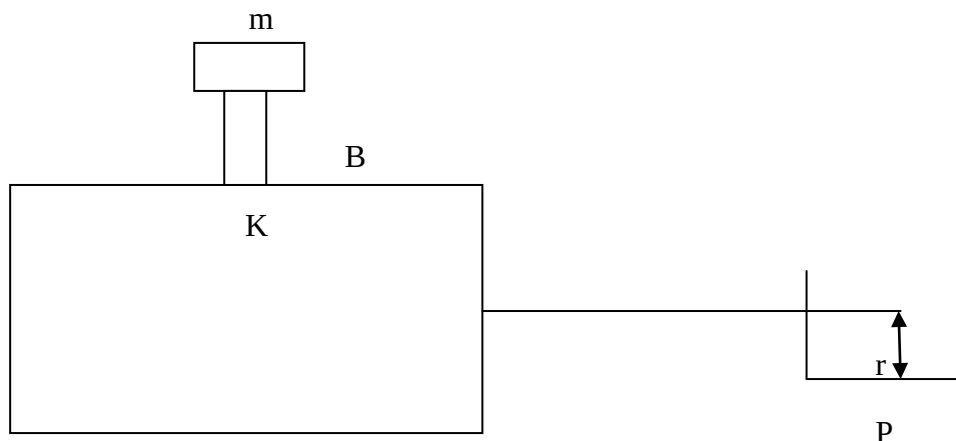
Традиційний розв'язок

Вантаж перебуває в рівновазі, а отже сили натягу. Прикладені до будь-якої ділянки нитки. Взаємно компенсують одна одну: $T_0 = T_1$; $T_1 = T_2$; $T_2 = T_3$; $T_3 = T_4$. Окрім того, $F = T_0$; $mg = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 4F$.

$$F = \frac{mg}{4}.$$

У ролі віртуального переміщення може виступати кут.

Задача 2. У коробці К заключений передавальний механізм невідомої конструкції. При повороті ручки Р вертикальний гвинт В плавно піднімається (радіус обороту r) гвинт переміщується на відстань h . На гвинт кладуть вантаж масою m . яке зусилля необхідно прикласти до ручки. Щоб утримати систему з вантажем у рівновазі?



Нехай шукана величина сили F при нескінченно малому повороті на кут $\delta\psi$ здійснює роботу $\delta A_1 = F\delta L = Fr\delta\psi$. При цьому вантаж піднімається на висоту $\delta h = \frac{r}{2\pi}\delta\psi$ і робота сили тяжіння $\delta A_2 = -mg\frac{r\delta\psi}{2\pi}$. Тоді з $\delta A_1 + \delta A_2 = 0$ маємо $F = mg\frac{r}{2\pi}$.

Зауважимо, що традиційними методами задача взагалі не розв'язується, бо нічого невідомо про захований у коробку механізм передачі.

Задача 3. Є ланцюг, що складається з N однакових невагомих елементів, зв'язаних шарнірно. Нехтуючи тертям, визначте, який натяг повинна витримувати нитка, що з'єднує точки 1 і 2, якщо до ланцюга підвішений вантаж масою m .

Нехай вантаж m опускається на δh . Робота сили тяжіння $\delta A_1 = -T\delta h$. δh знайдемо через поняття симетрії. Більша діагональ кожного елемента ланцюга подовжилась на $\frac{\delta h}{N}$, що дорівнює віртуальному переміщенню точки 2. Тому $mg\delta h - T\frac{\delta h}{N} = 0$, або $T = Nmg$. Метод віртуальних переміщень з успіхом може бути застосований і для виведення формул.

