

Методи визначення центра мас

Центром мас системи називається уявна точка, радіус-вектор якої:

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Позначимо масу системи $M = \sum_{i=1}^n m_i$:

$$M\vec{R} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_n\vec{r}_n$$

Знайдемо похідну по часу:

$$M\vec{v}_y = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_n\vec{v}_n.$$

У правій частині стоїть сумарний імпульс системи, $\vec{v}_y$ - швидкість центра мас.

Таким чином, центр мас системи рухається так як матеріальна точка маси M . це теорема про рух центра мас.

Знайшовши ще одну похідну, отримаємо:

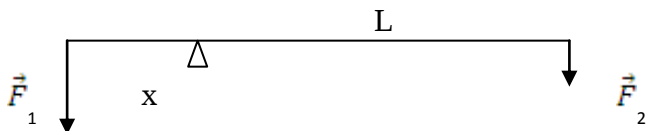
$$M\vec{a}_y = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{ex} = \vec{F}$$

Тут $\vec{a}_y$ - прискорення центра мас, $\vec{F}_i^{ex}$ - зовнішня сила, діюча на i -те тіло системи, а F – рівнодійна всіх сил, діючих на систему. Нагадаємо, що на основі третього закону Ньютона сума внутрішніх сил рівна нулю.

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{in} = 0$$

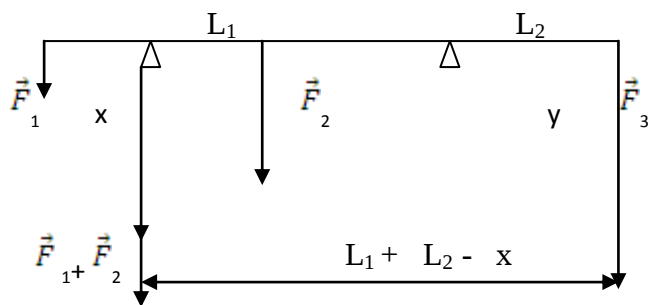
Цей результат дає можливість сформулювати означення центра мас системи, на яку діє зовнішня сила незалежно від її природи. Центр мас такої системи – точка прикладання рівнодійних всіх сил. У випадку дії одних лише сил тяжіння, центр мас системи замінюють співпадаючим з ним, але більш вузьким по змісту поняттям центра тяжіння.

Задача 1. До кінців невагомому стержня довжиною L прикладені сили F_1 і F_2 . Знайти точку прикладання рівнодійної.



Нехай O – шукана точка. За правилом моментів $F_1 x = F_2 (L - x)$, звідки $x = \frac{F_2 L}{F_1 + F_2}$.

Задача 2. Знайти центр мас системи, що показана на малюнку.



Для сил F_1 і F_2 скористаємось результатом попередньої задачі.

$$X = \frac{FL}{F_1 + F_2}$$

Вдруге скористаємось ним для сил $(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$ і $\vec{F}_3$.

$$y = \frac{(F_1 + F_2) \cdot (L_1 + L_2 - x)}{F_1 + F_2 + F_3}$$

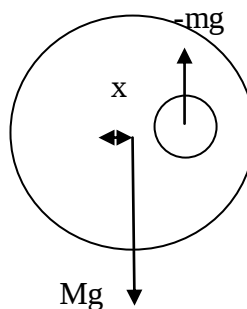
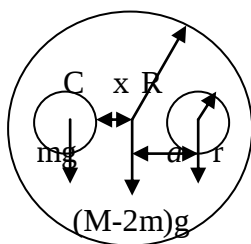
Підставивши значення x , отримаємо:

$$y = \frac{F_2 L_2 + F_1 (L_1 + L_2)}{F_1 + F_2 + F_3}$$

Розв'язавши ці дві задачі, ми фактично методом математичної індукції довели теорему Варіньона: момент рівнодійної відносно довільно вибраної осі дорівнює сумі моментів всіх сил відносно цієї ж осі. Ця вісь на малюнках проходить через точку А. теорема дає можливість знаходити центр мас, причому вісь зручно вибирати в точці прикладання декількох сил(моменти цих сил будуть рівні нулю).

Задача 3. З тонкого однорідного диску радіусом R , вирізано диск радіусом r ($r < \frac{R}{2}$).

Відстань між центрами диску O та площини a ($r < a$). знайти положення центра мас.



1-й спосіб. Виріжемо диск C радіусом r симетрично відносно центра O .

$$\pi r^2 (a - x) = \pi (R^2 - 2r^2)x$$

$$x = \frac{a}{\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1}$$

2-й спосіб.

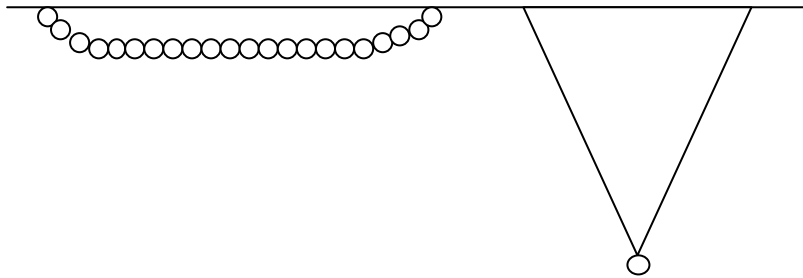
Задачу розв'яжемо методом негативних мас.

Подумки заповнимо площину однорідною речовиною тієї ж густини, що й диск. Щоб така операція була правильною, введену масу зручно вважати «негативною».

$$\pi R^2 x + (-\pi r^2) \cdot (x+a) = 0$$

$$x = \frac{a}{\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1}$$

Задача 4. На малюнку зображено ланцюг довжиною L і два стержня довжиною $\frac{L}{2}$ кожен. Чий центр мас вище?



Розтягнувши ланцюг вниз, ми придали їй форму стержнів. Отже, центр мас стержнів вище центра мас ланцюга.

Задача 5. На поверхні води плаває дерев'яний кубик квадратного перерізу ($\rho_{\text{куб}} = \frac{\rho_{\text{води}}}{2}$). Яке з двох положень рівноваги буде стійкішим?

У воді знаходиться половина кубика, тому його центр тяжіння в обох випадках розміщений на одній висоті. Центр тяжіння витісненої води у першому випадку знаходиться на відстані $\frac{a}{4}$ від її поверхні, у другому - $\frac{1}{3}a\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{a}{4}$. Це означає, що стійкішим буде положення 2.

