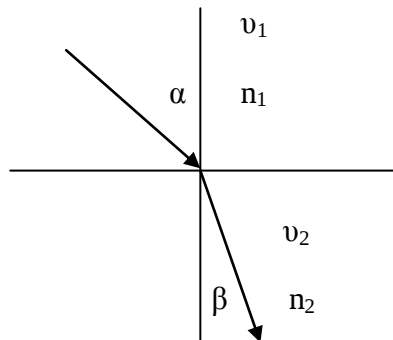


Оптико-механічні аналогії

Відомо, що світло при переході з одного середовища в інше, на межі поділу цих середовищ зазнає відхилення від прямолінійного поширення. Причому на межі поділу середовищ між кутом падіння α і кутом заломлення β виконується встановлене емпірично співвідношення (закон Снеліуса):

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_1}{n_2} = n_{21} = \frac{v_1}{v_2}$$

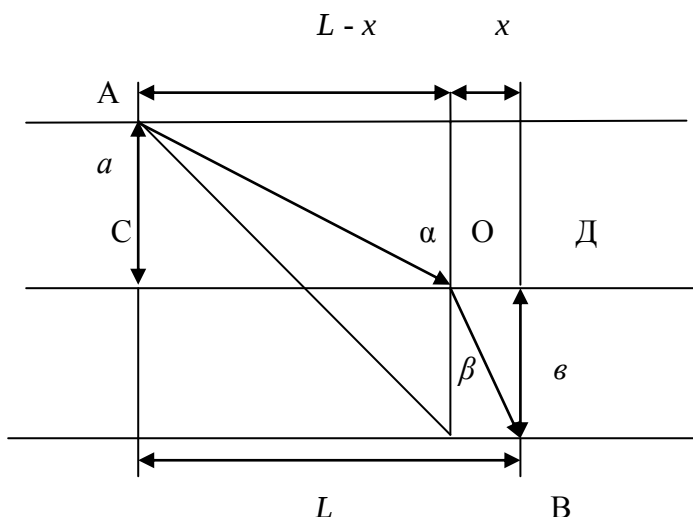
Де n_1 і n_2 – абсолютні показники заломлення середовищ, n_{21} – показник заломлення другого середовища відносно першого, v_1 і v_2 – відповідно швидкості поширення світла у цих середовищах



Закон Снеліуса пояснюється хвильовою природою світла і є наслідком принципу найменшої дії або принципу Ферма. Сутність цього принципу полягає в тому, що світло з однієї точки поширюється в іншу шляхом, час поширення яким, порівняно з іншими шляхами, є екстремальним (як правило, мінімальним). З принципу Ферма випливає прямолінійність поширення світла в ізотропному середовищі, зміна напрямку поширення на межі поділу двох середовищ тощо.

Розглянуті закономірності в оптиці можна використати під час розв'язування деяких задач з механіки. Розглянемо це на конкретних прикладах.

Задача 1. Людина може бігти по землі зі швидкістю v_1 і пливти в озері зі швидкістю v_2 . У якому напрямку необхідно рухатись людині з точки А, щоб потрапити в точку В на протилежному березі озера за найкоротший час? Лінія СД – межа поділу землі – вода.



Позначимо відстань від точки А до берега через a , ширину озера - через b , проекцію АВ на берегову лінію – через L . Нехай людина рухається з точки А у точку В ламаною АОВ. За цих умов час руху становитиме:

$$t = \frac{AO}{v_1} + \frac{OB}{v_2}$$

Позначивши проекцію прямої ОВ на берегову лінію через x , а проекцію прямої АО через $L - x$, запишемо:

$$AO = \sqrt{a^2 + (1-x)^2}, OB = \sqrt{b^2 + x^2}$$

Тоді час руху визначиться співвідношенням:

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + (1-x)^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + x^2}}{v_2}$$

Умова екстремуму для часу виконується за умови

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1-x}{v_1 \sqrt{a^2 + (1-x)^2}} + \frac{x}{v_2 \sqrt{x^2 + b^2}} = 0$$

Враховуючи, що :

$$\frac{1-x}{\sqrt{a^2 + (1-x)^2}} = \sin \alpha, \text{ а } \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} = \sin \beta,$$

Рівність запишеться так:

$$-\frac{\sin \alpha}{v_1} + \frac{\sin \beta}{v_2} = 0 \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

Отже, напрям, яким необхідно рухатись людині для переміщення з точки А у точку В за найкоротший час (у мінімальності часу можна переконатись за знаком другої похідної), визначається закономірностями поширення світла (принципом Ферма).

Задача 2. Людина стоїть на відстані $a = 10$ м від річки. На відстані $b = 50$ м від річки горить багаття. Відстань між перпендикулярами, які сполучають прямолінійний берег річки з людиною і багаттям, дорівнює $l = 80$ м. людина біжить берегом зі швидкістю $v = 5$ м/с до річки, зачерпне відро води, потім біжить до багаття й заливає його. Який мінімальний час потрібний для цього, якщо час на зачерпування води та її виливання на багаття становить $t_0 = 8$ с?

Використовуючи оптико-механічну аналогію, відобразимо ситуацію на рисунках. Точку А вважатимемо джерелом світла, берег – плоским дзеркалом. За даних умов промінь світла, який йде від джерела, після відбивання від дзеркала повинен потрапляти в точку В. Оскільки точка A^1 є уявним джерелом світла, то неважко зрозуміти, що найкоротшою траєкторією є відрізок A^1OB , який дорівнює $AOB = S$.

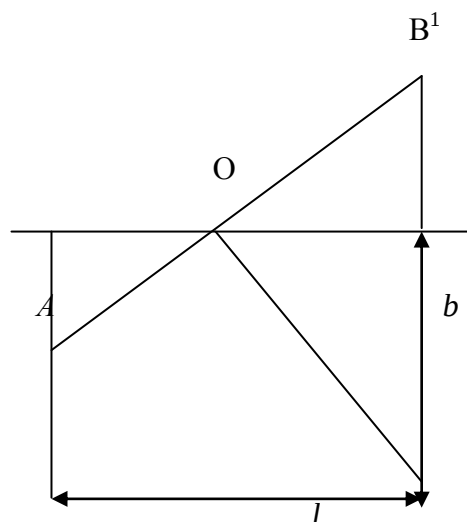
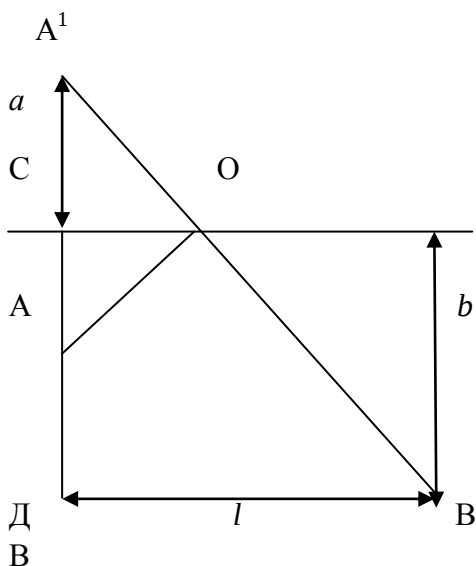
Згідно теореми Піфагора:

$$S = \sqrt{(AC + CD)^2 + DB^2} = \sqrt{(a + b)^2 + l^2}$$

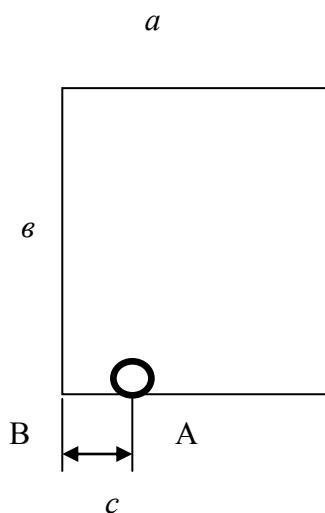
Час руху визначимо із співвідношення:

$$t = \frac{s}{v} + t_0 = \frac{\sqrt{(a+b)^2 + l^2}}{v} + t_0$$

підставляючи дані, одержимо $t = 28$ с. напрям руху людини до берега можна було визначити й виходячи з того, що точка O належить відрізку AB^1 , на якому точка B^1 є дзеркальним відображенням точки B .



Задача 3. Більярдна куля знаходиться у точці A на більярдному столі, розміри якого вказані на рисунку. У якому випадку необхідно спрямувати більярдну кулю, щоб після відбивання від двох бортів вона потрапила в лузу B ?



Є очевидним, що в лузу B куля може потрапити, зазнавши відбивань від правого і верхнього зображених на рисунку бортів. Застосуємо оптико-механічну аналогію, вважаючи точку A джерелом світла, борти – плоскими дзеркалами.

Один з можливих варіантів знаходження напрямку, за якого світло з точки A потрапить у точку B , такий:

- Точка A^1 – уявне зображення джерела А у правому дзеркалі;
- Точка B^1 – уявне зображення лузи (т. В) у верхньому дзеркалі;
- Точки С і Д – точки перетину світлового променя від уявного джерела A^1 до уявної лузи B^1 ;
- Реальний хід променя – ламана лінія АСДВ.

Враховуючи, що $\angle \alpha = \angle \beta$, напрям, у якому необхідно спрямувати кулю, визначається співвідношенням:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = \frac{BB^1}{AA^1} = \frac{2b}{2a-c}$$

Наведемо один із можливих варіантів розв’язання задачі аналітичним шляхом.

Нехай після того, як кулі надали швидкості v у напрямку АС, тобто під кутом $\angle \alpha$ до «нижнього» борта, траєкторією руху є ламана АСДВ. Проекції швидкості на координатні осі дорівнюють:

$$v_x = v \cos \alpha \quad i \quad v_y = v \sin \alpha$$

Відповідно шляхи, які проходить куля вздовж координатних осей, визначаються із співвідношення:

$$S_x = 2a - c \quad i \quad S_y = 2b$$

Враховуючи, що $S_x = v_x t$ і $S_y = v_y t$, дістанемо:

$$v_x t = 2a - c \quad i \quad v_y t = 2b$$

Звідси:

$$\frac{tv_x}{tv_y} = \frac{2b}{2a-c}$$

Скоротивши на час і врахувавши, що :

$$\frac{v_x}{v_y} = \operatorname{tg} \alpha$$

Значення кута α , під яким необхідно спрямувати кулю, щоб вона потрапила у лузу, визначимо із співвідношення:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2b}{2a-c}$$

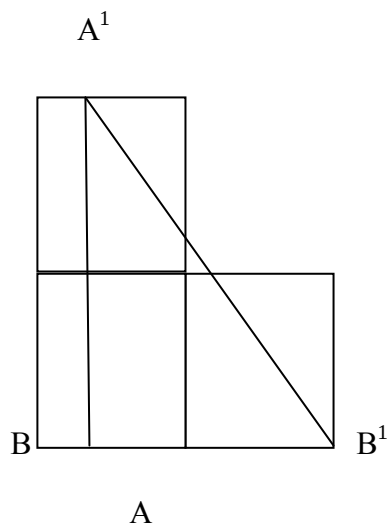
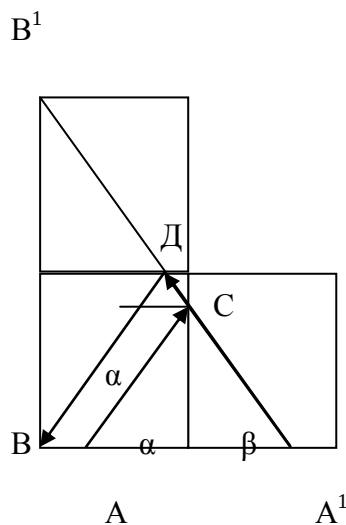
Як бачимо, розв’язування задачі аналітичним шляхом є більш громіздким, і, як показує практика, логіка розв’язку не завжди є очевидною.

Чи могла б куля потрапити у лузу, зазнавши відбивання спочатку від верхнього борта? Задля цього розглядатимемо відображення джерела у верхньому дзеркалі, а лузи (т. В) – у правому. Як бачимо з рисунка, пряма A^1B^1 не перетинає «бортів-дзеркал». Отже,

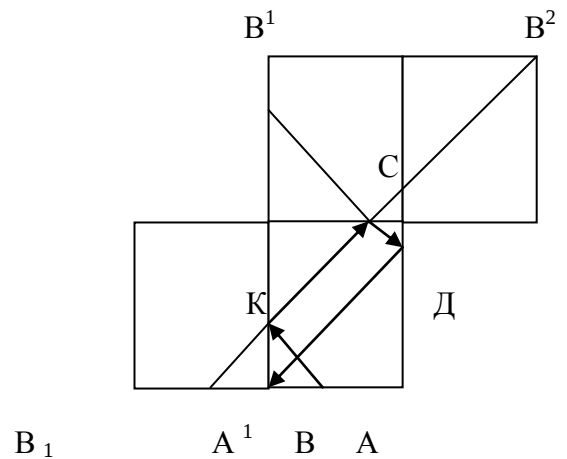
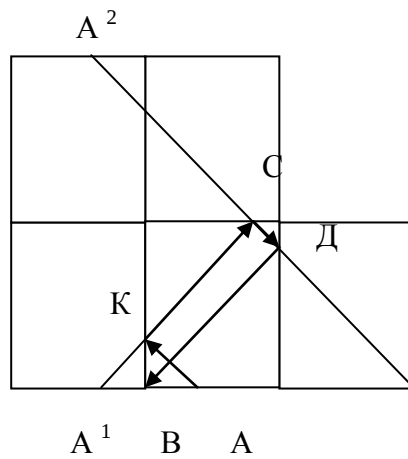
якщо спрямувати кулю спочатку напрямку верхнього борта, вона аж ніяк не зможе потрапити у лузу В.

У випадку, коли, за умовою задачі, для потрапляння в лузу кулі необхідно зазнати відбивання від трьох бортів, один з можливих розв'язків задачі (для послідовності відбивань у «лівий – верхній – правий» борти) такий:

- Точка A^1 є уявним зображенням точки А у лівому дзеркалі;
- Точка A^2 є уявним зображенням точки A^1 у верхньому дзеркалі;
- Точка B^1 – уявне зображення лузи (точки В) у правому дзеркалі;
- Відстань від точки A^2 до B^1 є довжиною шляху, пройденого кулею від точки А до лузи;
- Точки С і Д – відповідно точки другого і третього відбивання;
- Для пошуку місця першого відбивання проведемо пряму з точки A^1 у напрямку точки С. точка К визначає місце першого відбивання;
- Ламана АКСДВ є шуканою траєкторією руху кулі.



Можна було б розв'язати задачу, розглядаючи зображення точки А тільки в одному (лівому) дзеркалі, а лузу (т. В) спочатку у верхньому (т. B^1), а потім утворене уявне зображення у правому дзеркалі (т. B^2).



За цих умов точки перетину лінії $A^1 B^2$ з бортами визначають місця першого (т. К) і другого (т. С) ударів. Для пошуку місця третього відбивання проведемо пряму з точки B^1 у напрямку точки Д. Точка перетину цієї лінії з третім бортом (т. Д) визначає місце третього відбивання, а ламана АСДМВ – траєкторію руху кульки.

Для повного розв'язку цієї задачі необхідно розглянути варіанти можливої послідовності відбивань.

А саме – «лівий – правий – верхній», «правий – лівий – верхній» борти.

У випадках, коли куля зазнає відбивання від чотирьох бортів, доцільно в оптико-механічній аналогії розглянути уявне зображення у двох довільно вибраних «бортах-дзеркалах» як джерела (початкове положення кулі), так і точки. Через які пройде в кінцевому випадку «куля – світловий промінь» (луза. Друга більярдна куля тощо).