

Аналогії між вільними механічними коливаннями та рівномірним обертальним рухом

Ми частково зупинялись на аналогії коливального та обертального рухів. За допомогою цієї аналогії можна розв'язати основну задачу механіки для цього руху, визначити швидкість, прискорення руху, період та циклічну частоту коливань. Одночасно одержані закономірності можна використати для розв'язання задач з інших розділів фізики.

Для розв'язку основної задачі механіки коливального руху спочатку записують рівняння руху тіла, виходячи з другого закону Ньютона або із закону збереження механічної енергії. після цього розв'язують диференціальне рівняння і записують закон зміни з часом координати, швидкості, прискорення руху тіла та співвідношення для визначення періоду коливань даної системи.

Наприклад, у випадку коливання тягарця маси m на пружині жорсткістю k у межах пружних деформацій другий закон Ньютона запишеться так:

$$ma = -kx \quad \text{або} \quad a_x = -\frac{k}{m}x$$

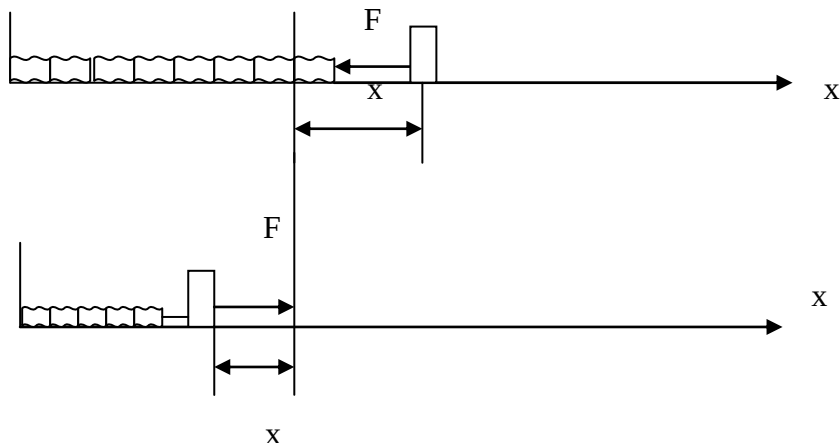
Оскільки прискорення руху a є другою похідною від зміщення (координати) x , рівняння руху, як правило, записують так:

$$x'' + \omega^2 x = 0 \quad \text{або} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Це однорідне диференціальне рівняння другого порядку, яке описує гармонічні коливання одного з параметрів коливальної системи (в нашому випадку – координати). Розв'язок цього рівняння у загальному випадку має вигляд :

$$x = A \sin \omega t + B \cos \omega t,$$

де $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - власна частота коливань системи, A і B – сталі, значення яких визначаються із початкових умов.



Якщо в початковий момент часу ($t = 0$) тіло перебуває у положенні рівноваги ($x = 0$), рівняння запишеться так:

$$A \sin \omega t + B \cos \omega t = 0$$

Враховуючи, що для цього моменту часу $\sin \omega t = 0$, а $\cos \omega t = 1$, дістанемо $B = 0$.

Для визначення коефіцієнта A розглянемо момент часу $t = \frac{T}{4}$. Для цього моменту фаза $\omega t = \frac{\pi}{2}$, початкова координата $x = x_0$, $\sin \omega t = 1$, $\cos \omega t = 0$. Підставляючи ці значення у рівняння, дістанемо $A = x_0$.

Отже, координата тягарця змінюється за законом:

$$x = A \sin \omega t = x_0 \sin \omega t$$

Для випадку, коли в початковий момент ($t = 0$) координата тіла $x = x_0$, значення коефіцієнтів відповідно дорівнюють $A = 0$ і $B = x_0$. За цих умов рівняння руху тягарця має вигляд :

$$x = B \cos \omega t = x_0 \cos \omega t$$

Проте в шкільній практиці розв'язок основної задачі механіки для вільних коливань пружинного маятника за допомогою диференціального рівняння здійснити нереально, оскільки на момент визначення цієї теми з фізики учні ще не володіють необхідними знаннями з математичного аналізу. Тому в чинних підручниках розв'язок основної задачі механіки для цього руху або взагалі не розглядається, або розглядається не зовсім коректно. В одних випадках наголошується. Що це буде зроблено, коли учні познайомляться з елементами інтегрування і диференціювання, в інших випадках проблема розв'язується на основі порівняння коливального руху із рівномірним рухом по колу.

Вважається, що коливання тіла під дією сили пружності збігається з рухом проекції тіла, що обертається із сталою кутовою швидкістю і без відповідного теоретичного обґрунтування стверджується, що рух тілі від кульки, яка рівномірно обертається і коливання тіла на пружині відбуваються за однаковими законами.

На наш погляд, теоретичне обґрунтування аналогії між цими двома рухами доцільно здійснити на основі математичної моделі розв'язку такої задачі.

Задача 1. Матеріальна точка M рівномірно обертається по колу з періодом T . встановити залежність від часу проекції радіус-вектора r , вектора лінійної швидкості v_0 та вектора прискорення a_0 на координатну вісь, початок відліку якої збігається із центром кола. Записати залежність від часу координати точки M_x , яка є ортогональною проекцією точки M на цю вісь.

Нагадаємо, що проекцію вектора b на вісь x є число b_x , яке дорівнює добутку модуля вектора b на косинус кута ψ між напрямком вектора і додатним напрямком осі:

$$b_x = b \cos \psi$$

Відповідно, проекція радіус-вектора r на координатну вісь x запишеться так:

$$r_x = r \cos \psi$$

Оскільки координата точки M_x , дорівнює чисельно значенню проекції радіус-вектора на цю ж вісь, то можна записати

$$x = r_x = r \cos \psi$$

Проекції на координатну вісь векторів швидкості і прискорення точки M , враховуючи їхню спрямованість відносно вектора r , запишуться так:

$$v_x = v_0 \cos(\psi + \frac{\pi}{2}) = -v_0 \cos \psi$$

$$a_x = a \cos(\psi + \pi) = -a_0 \cos \psi$$

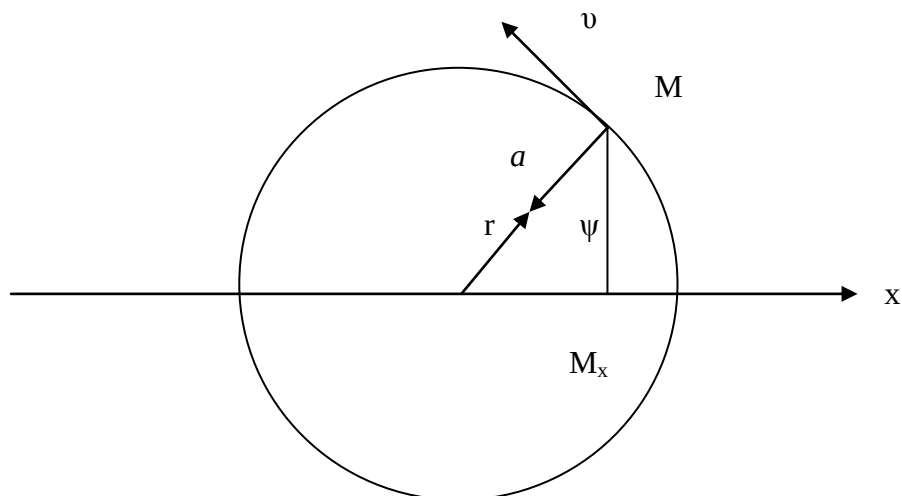
Враховуючи, що $\psi = \frac{2\pi}{T}t$, рівності набувають вигляду:

$$r_x = r \cos \frac{2\pi}{T} t,$$

$$x = r \cos \frac{2\pi}{T} t,$$

$$v_x = -v_0 \cos \frac{2\pi}{T} t,$$

$$a_x = -a_0 \cos \frac{2\pi}{T} t,$$



Оскільки швидкість обертання точки М $v_0 = \cos \frac{2\pi}{T} t$, її прискорення під час руху по колу визначається за формулою

$$a_0 = \frac{v_0^2}{r} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

Проекція прискорення руху цієї точки на координатну вісь з урахуванням формул запишеться так:

$$a_x = - \frac{4\pi^2}{T^2} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = - \frac{4\pi^2}{T^2} x$$

Порівнюючи рівняння руху коливань тягарця на пружині і рівняння руху точки М_x, можна стверджувати, що математична модель цих рухів однакова, тобто між ними існує математична аналогія. Це означає, що для будь-якого коливання тіла на пружині з амплітудою x_0 і періодом T_1 існує такий рівномірний рух матеріальної точки М колом із радіусом $r = x_0$ і періодом T , що виконується умова

$$T_1 = T \text{ і } \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{k}{m}$$

За цих умов рух точки М_x, яка є проекцією точки М на координатну вісь, є таким самим, як і рух тіла, що коливається. Відповідно до рівняння, координата тіла, що коливається на пружині, змінюється з часом за законом:

$$x = x_0 \cos \frac{2\pi}{T} t = x_0 \cos \omega t$$

Період і циклічна частота коливань цього тіла виражаються формулами:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \text{ і } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Розглянуті закономірності можна поширити і на інші рухи, за умови дії в системі сили, проекція якої на відповідну вісь пропорційна координаті й протилежна їй за знаком.

У випадку дії сил непружного походження, значення яких змінюється за тим же законом, що і сила пружності пружини ($F = - kx$), їх називають квазіпружними, а величину перед зміщенням – квазіпружністю системи. Значення ж фізичної величини у формулі взаємозв'язку прискорення руху через координату визначає циклічну (колову) власну частоту коливань системи.

Формулу залежності прискорення руху від координати у багатьох випадках зручніше одержати із закону збереження енергії системи. Наприклад, у випадку коливання тягарця на пружині повна механічна енергія системи у довільний момент часу є величиною сталою. Тобто:

$$E_k + E_n = \text{const} \quad \text{або} \quad \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const}$$

Диференціюючи це рівняння за часом, дістанемо:

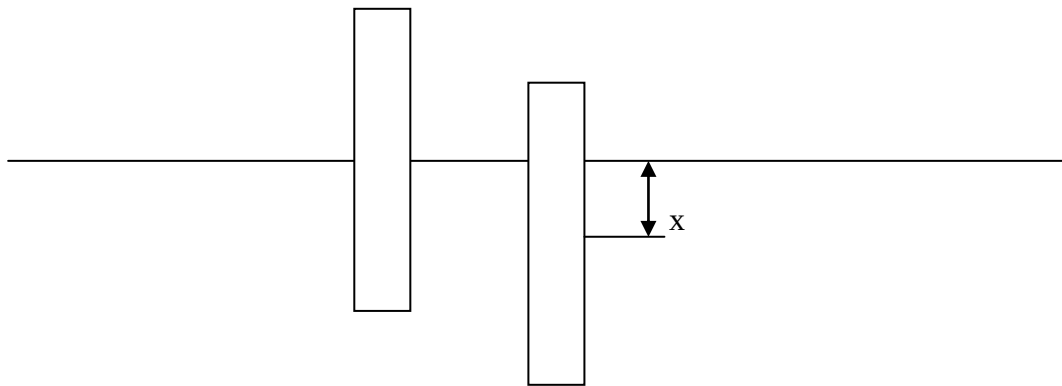
$$\frac{2mv}{2} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{2kx}{2} \cdot \frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{2mv}{2} v'_x + \frac{2kx}{2} x' = 0$$

Враховуючи, що $\frac{dx}{dt} = x'$ є швидкість руху, $\frac{dv}{dt} = v'_x$ - прискорення, після відповідних замін рівняння набуде звичного вигляду:

$$a_x + \frac{k}{m}x = 0 \quad \text{або} \quad x'' + \omega^2 x = 0$$

Розглянемо кілька задач, розв'язання яких ґрунтується встановлених закономірностях.

Задача 2. Визначити період власних коливань поплавка циліндричної форми, що плаває на спокійному плесі озера у вертикальному положенні. Маса поплавка m , площа поперечного перерізу S , густина води ρ . Втрати енергії під час коливань та рухом води знехтувати.



Змістимо поплавок відносно положення рівноваги на величину x (наприклад, вниз). Сила Архімеда, що діє на поплавок, збільшиться на :

$$\Delta F_x = \rho g \Delta V = \rho g S x,$$

Де ΔV – зміна об'єму зануреної частини поплавка. Оскільки ця сила протилежна за напрямком зміщенню, необхідно записати:

$$\Delta F_x = - \rho g S x$$

Згідно з другим законом Ньютона, рівняння руху поплавка запишеться так:

$$ma_x = - \rho g S x$$

Звідси:

$$a_x = - \frac{\rho g S}{m} x$$

Це рівняння аналогічне рівнянню коливань тягарця на пружині. За цих умов квазіпружність системи $k = \rho g S$. Тоді з аналогії випливає:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho g S}}$$

Задача 3. Санки довжиною L , які ковзають горизонтальною поверхнею снігу, потрапляють на ділянку, посипану піском, і зупиняються, проїхавши половину своєї довжини. Визначити час гальмування санок і їхню швидкість руху по снігу. Масу санок вважати рівномірно розподіленою уздовж санок.

Під час руху санок поверхнею, посипаною піском, діє сила тертя, яка змінюється за значенням від 0 до $F_{\text{тер.мах}} = \mu mg$. Сила тертя, коли на поверхні, посипаній піском, знаходиться довжина санок x , дорівнює:

$$F_{\text{тх}} = - \mu \frac{mg}{l} x$$

Де L – загальна довжина санок. Прискорення руху санок у цей момент:

$$a_x = - \frac{F_{\text{тх}}}{m} = - \frac{\mu g}{l} x$$

Аналізуючи рівняння, бачимо, що прискорення прямо пропорційне переміщенню і протилежне йому за напрямком. За таким же законом змінюється координата при коливальному русі.

Оскільки швидкість руху санок змінюється від максимального значення до нуля, то час цієї зміни відповідає одній четвертій періоду коливального руху. враховуючи, що

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu g}{l}}, \text{ а } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

дістанемо:

$$t_{\text{гальм}} = \frac{1}{4} T = \frac{\pi}{2\omega} = 0,5 \sqrt{\frac{l}{\mu g}}$$

За аналогією з рівнянням руху тіла під час гармонічних коливань з амплітудою $\frac{l}{2}$, запишемо рівняння руху санок:

$$X = \frac{l}{2} \sin \omega t = \frac{l}{2} \sin \sqrt{\frac{\mu g}{l}} t$$

Враховуючи, що $v_x = x'$, дістанемо:

$$v_x = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{\mu g}{l}} \cos\left(\sqrt{\frac{\mu g}{l}} t\right)$$

Початкова швидкість санок відповідає моменту часу $t = 0$, тобто відповідає амплітудному значенню швидкості під час коливального руху:

$$v_0 = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{\mu g}{l}} = 0,5 \sqrt{\mu g l}$$

Це співвідношення можна також одержати із закону збереження енергії, вважаючи, що квазіпружність системи дорівнює:

$$k = \frac{\mu g m}{l}$$

Тоді з рівності $\frac{mv^2}{2} = \frac{kx^2}{2}$ дістанемо:

$$mv_0^2 = \frac{\mu g m}{l} x_0^2.$$

Звідси, враховуючи, що $x_0 = \frac{l}{2}$, дістанемо :

$$v_0 = 0,5 \sqrt{\mu g l}$$

Задача 4. Оцінити час падіння тіла до центра Землі в уявній криниці, викопаній на полюсі. Опір повітря не враховувати. Землю вважати однорідною кулею з радіусом $R = 6400$ км.

Прискорення руху тіла в криниці визначається із співвідношення:

$$a = \frac{F}{m}$$

де F – сила тяжіння, що діє на тіло, m – маса тіла. Оскільки сила тяжіння визначається відстанню тіла до центра Землі, можна записати :

$$F = G \frac{m m_2}{r^2} = G \frac{m \rho V}{r^2} = \frac{4}{3} \pi G m \rho \frac{r^3}{r^2} = \frac{4}{3} \pi G m \rho r$$

Прискорення руху тіла в момент, коли тіло знаходиться на відстані r від центра Землі, визначається зі співвідношення:

$$a_r = - \frac{4}{3} \pi G \rho r,$$

де r – відстань від центра Землі (аналог x), знак «мінус» враховує те, що напрям прискорення руху і напрям v (від центра Землі) протилежні.

Як бачимо, отримана залежність аналогічна прискоренню руху тіла при гармонічних коливаннях із циклічною частотою:

$$\omega \sqrt{\frac{4}{3}} \pi G \rho$$

Час руху тіла до центра Землі, як і в попередній задачі, становитиме:

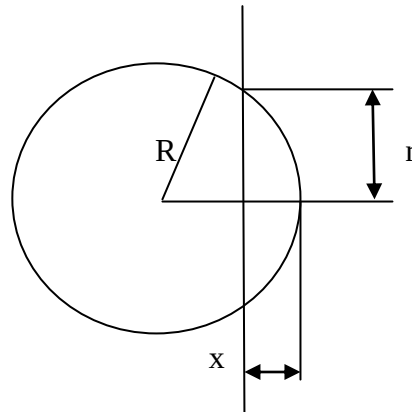
$$t = \frac{1}{4} T = 0.5 \sqrt{\frac{3\pi}{4G\rho}}$$

Враховуючи, що $\rho = \frac{M}{V}$, $V = \frac{4}{3} \pi r^3$, а $g = G \frac{M}{R^2}$, дістанемо:

$$t = 0,5 \sqrt{\frac{R}{g}} \approx 1300 \text{ с.}$$

Задача 5. Оцінити час удару кульки, наповненої повітрям, у пружну стінку, нехтуючи жорсткістю кульки. Маса повітря у кульці m , її радіус R . Вважати, що кулька рухається перпендикулярно до стінки, а надлишковий тиск у кульці Δp під час удару помітно не змінюється.

За невеликих швидкостей руху кульки деформації під час удару є незначними. Тому можна вважати, що місцем дотикання є круг з радіусом r .



Оскільки :

$$r = \sqrt{R^2 - (R - x)^2} = \sqrt{2Rx - x^2}$$

Площа дотикання кульки зі стінкою дорівнює:

$$S = \pi R^2 = 2\pi R x \left(1 - \frac{x}{2R}\right)$$

Вважаючи, що $x \ll R$, знехтуємо доданком $\frac{x}{2R}$. Тоді $S = 2\pi R x$. Оскільки, за умовою задачі, надлишковий тиск у кульці помітно не змінюється, визначимо силу, яка діє на м'яч під час удару із співвідношення:

$F \approx (p - p_0)S = 2\pi (p - p_0)R x$, де p_0 – значення атмосферного тиску, p – тиск всередині кульки.

Оскільки сила, що діє з боку стінки на м'яч, є пропорційною деформації, квазіпружність системи дорівнює

$$k = 2\pi(p - p_0)R = 2\pi\Delta p R$$

За цих умов рух центра м'яча описується законами гармонічних коливань

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

з циклічною частотою

$$\omega = \frac{k}{m} = \sqrt{\frac{2\pi R(p - p_0)}{m}}$$

Враховуючи, що час удару становить половину періоду коливань, дістанемо:

$$t = \frac{T}{2} = \sqrt{\frac{\pi m}{2R(p - p_0)}} = \sqrt{\frac{\pi m}{2\Delta p R}} \approx 10^{-2} \text{ с.}$$