

Метод розмірностей

Розмірність фізичної величини — вираз, що відображає зв'язок фізичної величини з основними величинами системи величин.

Розмірність це одночлен, складений з добутку узагальнених символів основних одиниць в різних (цілих або дробових, додатних чи від'ємних) степенях, які називаються показниками розмірності. Так, наприклад, розмірність швидкості LT^{-1} , де T це розмірність часу, а L — довжина. Ці символи позначають одиниці часу і довжини незалежно від їх конкретного розміру (секунда, хвилина чи година, метр чи сантиметр і т. д.).

Термін «розмірність» може стосуватись також одиниці вимірювання фізичної величини. Часто абстрагуються від конкретних одиниць вимірювання і описують розмірності в термінах основних фізичних величин, таких, наприклад, як довжина, маса та час, які позначають символами L , M і T , відповідно. Розмірність записують, як добуток цих символів, кожен з яких піднято до раціонального степеня.

Наприклад, розмірність швидкості — відстань, розділена на час (LT^{-1}), а розмірність сили — маса, помножена на відстань і поділена на час в квадраті (MLT^{-2}). В механіці розмірність будь-якої величини може бути виражена через відстань (яку фізики часто називають «довжиною»), масу і час. Електричні та магнітні величини також можуть бути виражені через ці три розмірності з використанням, наприклад, закону Кулона. Однак, при використанні СІ іноді буває зручніше ввести розмірність такої основної фізичної величини, як електричний струм (I).

Більшість величин з якими ми стикаємось в повсякденному житті вимірюється в певних одиницях (маса — кг, час — сек, і т.д.). Здійснюючи певні математичні дії з такими величинами ми оперуємо не тільки ними, але і їхніми розмірностями, тобто величинами і одиницями в яких вони вимірюються: тобто $2 \text{ кг} + 3 \text{ кг} = 5 \text{ кг}$, але нонсенсом буде $2 \text{ кг} + 3 \text{ м}$. Таким чином, перевіряючи розмірності наших величин в правій і лівій частині рівнянь ми контролюємо правильність розв'язку. Однак, виявляється, що **метод розмірностей** може бути використаний не тільки і не скільки для перевірки правильності розв'язку поставленої задачі, але й для виведення з точністю до константи невідомих співвідношень між фізичними величинами.

Дії з розмірностями зводяться до пошуку математичних операцій, що пов'язують різні розмірності між собою. В загальному випадку якщо величина y є функцією інших величин, то ми можемо записати

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1)$$

Основним фундаментальним підходом методу розмірностей є те, що будь-яку таку функцію ми можемо представити у вигляді наступного виразу

$$y = C x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma} \dots x_n^{\omega}, \quad (2)$$

де C — безрозмірна константа;

$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega$ — невідомі константи (чи степеневі показники), які потрібно знайти, склавши систему відповідних рівнянь.

Очевидно, що для коректної постановки задачі і її розв'язання кількість рівнянь повинна співпадати з кількістю невідомих показників. Так з допомогою піднесення до степеня можна перетворювати метри лінійні (відстані) в метри квадратні (площа), та в метри кубічні (об'єм).

Існують різні способи вимірювання фізичних величин, а саме:

- а) *прямі* (наприклад, відстань – лінійкою, час – секундоміром).
- б) *непрямі, або опосередковані* (наприклад, напруга, швидкість, вимірювання температури).

Величини, вибір одиниць вимірювання яких не залежить від інших величин називаються *основними*, а ті, вимірювання яких залежить від вимірювання інших – *похідними* (доцентрове прискорення: $a = v^2/r$; сила: $F = m \cdot a$; прискорення: $a = v/t$).

Введемо для зручності такі позначення:

$$[l] = m \stackrel{\text{def}}{=} L$$

$$[m] = kg \stackrel{\text{def}}{=} M \quad (3)$$

$$[t] = s \stackrel{\text{def}}{=} T$$

Тут слід зазначити, що вигляд будь-якої величини взятої в квадратні дужки означає її розмірність, а означення $\stackrel{\text{def}}{=}$ характеризує ситуацію, коли певні буквенні позначення вводяться за означенням.

Суть методу розмірностей полягає в тому, що якщо деяка величина y є функцією незалежних змінних інших $x_1, x_2, \dots, x_n$ і ця функція має вигляд

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

то ця залежність вірна тоді і тільки тоді, коли виконується співвідношення

$$[y] \equiv [f]. \quad (4)$$

Нехай ми маємо три функції: y, f, φ . Математичні дії з цими функціями зводяться до того, що аналогічні дії ми можемо здійснювати із їхніми розмірностями. Існують основні чотири правила дій з розмірностями:

$$\text{а) } [y] = [f \pm \varphi] = [f] \pm [\varphi] \quad (5)$$

$$\text{б) } [y] = [f \cdot \varphi] = [f] \cdot [\varphi] \quad (5)$$

$$\text{в) } [y] = \left[\frac{f}{\varphi} \right] = \frac{[f]}{[\varphi]} \quad (5)$$

$$\text{г) } [y] = [f^\alpha] = [f]^\alpha \quad (5)$$

Так в загальному випадку, якщо ми маємо представлення невідомої функції $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ у вигляді $y = C x_1^a x_2^b x_3^c \dots x_n^w$ то при цьому можливі дві ситуації:

а) $C = \text{const}$ (що буває дуже часто) і при цьому автоматично розмірність C :

$$[C] \equiv 1.$$

б) $C = C(x_1, x_2, \dots, x_n)$, але ці x_i перебувають в таких комбінаціях, що дають безрозмірну величину, і знову ж розмірність C :

$$[C] \equiv 1.$$

Коли спостерігається випадок, що розмірність константи не дорівнює одиниці ($[C] \neq 1$) як наприклад, у випадку сили гравітаційної взаємодії

$$F = G \frac{m_1 m_2}{R^2},$$

то для знаходження шуканої функції y потрібно експериментально знайти розмірність невідомої константи і застосувати співвідношення (5) б):

$$[y] = [f \cdot \varphi] = [f] \cdot [\varphi]$$

тільки замість функції φ буде розмірність $[C]$, і тому

$$[y] = [f \cdot C] = [f] \cdot [C].$$

В цьому випадку константи C (коли вони мають розмірність) називають **фундаментальними фізичними сталими**.

Приклад 1.

З допомогою методу розмірностей знайти прискорення точки, що рівномірно рухається по колу з постійною лінійною швидкістю v .

Алгоритм розв'язку

1. Від чого може залежати a при русі по колу?

2. Припускаємо, що прискорення може залежати від:

а) радіуса R

б) маси m

в) лінійної швидкості v .

3. Представимо нашу шукану залежність у вигляді

$$a = f(R, m, v).$$

4. Використовуючи основний фундаментальний підхід методу розмірностей (2) запишемо нашу шукану функцію у вигляді

$$a = C \cdot R^\alpha \cdot m^\beta \cdot v^\gamma. \quad (6)$$

5. Запишемо окремо розмірності кожної з величин використовуючи співвідношення (3):

$$[a] = \frac{m}{c^2} = \frac{L}{T^2} = L \cdot T^{-2}$$

$$[R] = m = L$$

$$[m] = \text{кг} = M$$

$$[v] = \frac{m}{c} = \frac{L}{T} = L \cdot T^{-1}$$

6. Вигляд цих розмірностей підставимо у співвідношення (6), та застосуємо основну фундаментальну тотожність методу розмірностей (4).

В нашому випадку вона матиме вигляд:

$$[a] = [C \cdot R^\alpha \cdot m^\beta \cdot v^\gamma],$$

або ж використовуючи правило (5) б):

$$[a] = [C] \cdot [R^\alpha] \cdot [m^\beta] \cdot [v^\gamma].$$

7. У це співвідношення підставляємо значення розмірностей:

$$L T^{-2} = 1 \cdot L^\alpha \cdot M^\beta \cdot (L T^{-1})^\gamma = 1 \cdot L^\alpha \cdot M^\beta \cdot L^\gamma \cdot T^{-\gamma} = 1 \cdot L^{\alpha+\beta} \cdot M^\beta \cdot T^{-\gamma}.$$

8. Прирівнюючи показники степенів для різних фізичних величин в правій та лівій частині відповідно, отримуємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \text{для } L: L^1 = L^{\alpha+\beta} \\ \text{для } M: M^0 = M^{\beta} \\ \text{для } T: T^{-2} = T^{-\gamma} \end{cases} \Rightarrow$$

Враховуючи, те що при рівності степеневих функцій, при однакових їх основах, автоматично впливає тотожна рівність їх показників, отримуємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} L: 1 = \alpha + \beta \\ M: 0 = \beta \\ T: -2 = -\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = 2 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

Згадаємо наше співвідношення

$$a = C \cdot R^{\alpha} \cdot m^{\beta} \cdot v^{\gamma}$$

і підставимо в нього розв'язки нашої системи рівнянь:

$$a = C \cdot R^{-1} \cdot m^0 \cdot v^2 = C \frac{v^2}{R}.$$

Ми знаємо, що $C = 1$.