

Графічні методи розв'язування задач

Часто графічне представлення фізичного процесу робить його більш наглядним і тим самим полегшує розуміння проблемного явища. Графіки широко використовуються на практиці для розв'язування різноманітних науково-технічних та народногосподарських задач. Вміння будувати та читати їх сьогодні є обов'язковим для багатьох спеціалістів.

Відомо, що деякі задачі з курсу фізики середньої школи не можна розв'язати методами елементарної математики. До таких задач належать, наприклад, виведення формули для знаходження переміщення тіла в прямолінійному рівноприскореному русі або виведення формули роботи сили пружності та ін. Розв'язати їх можна лише засобами вищої математики. Проте, не застосовуючи вищу математику, а користуючись лише графічним способом, можна вивести формулу для визначення переміщення при рівноприскореному русі і формулу роботи сили пружності.

Графічним способом можна вивести також і інші формули: а) формулу роботи виштовхувальної сили рідини, що діє на тіло правильної форми; б) формулу енергії зарядженого конденсатора; в) формулу енергії магнітного поля провідника із струмом.

Графічний спосіб розв'язування задач полягає у знаходженні числових значень шуканих фізичних величин за допомогою графіків і векторних діаграм. За допомогою графіка можна знаходити не тільки шукані, а й проміжні величини.

Переваги графічного способу — доступність і наочність, його недолік — він не завжди дає точне значення шуканої величини.

Виведення деяких формул з фізики з використанням графіків функцій

Виведення формули для визначення енергії магнітного поля котушки зі струмом.

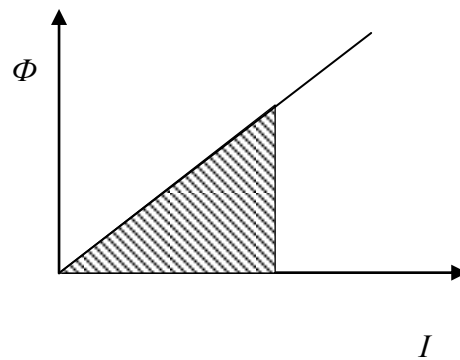
Виведення цієї формули графічно принципово нічим не відрізняється, наприклад, від виведення формули для визначення роботи сили пружності чи енергії електричного поля зарядженого конденсатора, оскільки ці виведення мають спільну властивість. Такою спільною властивістю є лінійна залежність між величинами, що входять до правих частин цих формул.

Формула

$$\Phi = LI$$

встановлює лінійну залежність між потоком магнітної індукції Φ через контур і силою струму I у ньому. Цим рівнянням можна скористатися, щоб вивести формулу енергії магнітного поля електричного струму. При цьому вважатимемо, що теплових втрат немає, провідник нерухомий, отже, вся робота джерела струму йде на збільшення енергії магнітного поля струму.

Графіком залежності Φ від I є пряма.



Під час зростання сили струму його джерело виконує роботу проти індукційного електричного поля, яке протидіє наростанню сили струму.

Енергія створеного магнітного поля дорівнює цій роботі.

$$W_m = -A = -\varepsilon_i \cdot \Delta q = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \Delta q = \Delta \Phi \cdot \Delta I$$

Площа заштрихованого трикутника чисельно рівна енергії магнітного поля.

$$W_m = \Phi \cdot I / 2$$

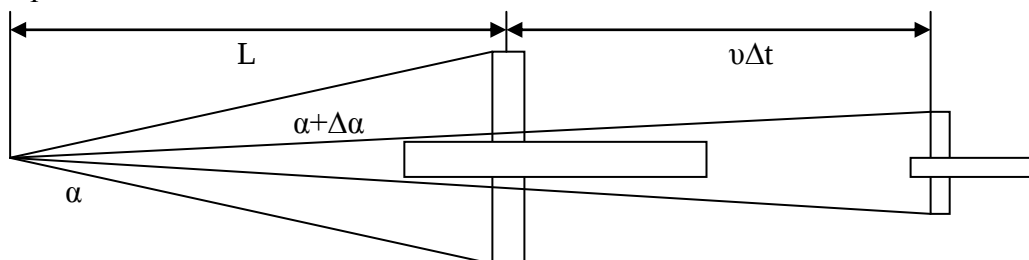
Підставивши, одержимо:

$$W_m = LI^2 / 2.$$

До графічних задач ми відносимо задачі: на побудову, де значно допомагають малюнки, креслення; схеми, що розв'язуються за допомогою векторів, діаграм, епюр та номограм.

У даному розділі розглядаємо лише деякі з названих типів задач.

Задача 1. Спостерігач з вишки побачив у бінокль на обрії горизонту літак, що летить прямо на нього. У початковий момент крила літака займали в біноклі 40 поділок, а через 10 секунд стали займати 42 поділки. Оцініть час, протягом якого літак виявиться над спостерігачем.



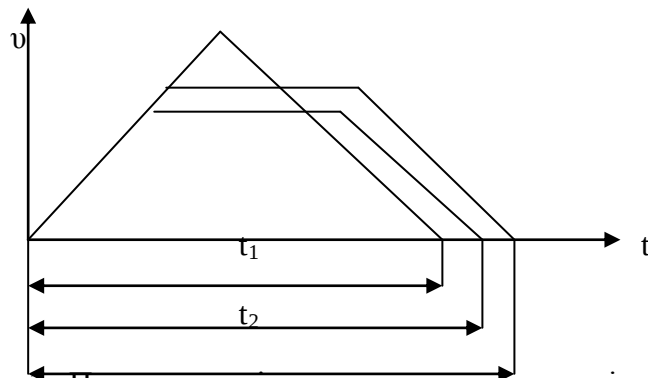
Задачу розв'язує динамічний малюнок. Очевидно, що $\alpha(L + v\Delta t) = (\alpha + \Delta\alpha)L$.
Звідки $t = \frac{L}{v} = \frac{\alpha}{\Delta\alpha}\Delta t = 200$ с.

Задача 2. Між двома зупинками трамвай рухається по прямій. При цьому він не може рухатись з прискоренням, рівним по модулю a . Яким повинен бути характер руху, щоб час руху був мінімальним?

Графік $v(t)$ може являти собою або трапецію, або трикутник. $a = \tan\alpha$ – максимальний кут на графіку.

Площі фігур однакові. Очевидно, що найменша основа (тобто найменший час) при однакових площах і куті α має трикутник.

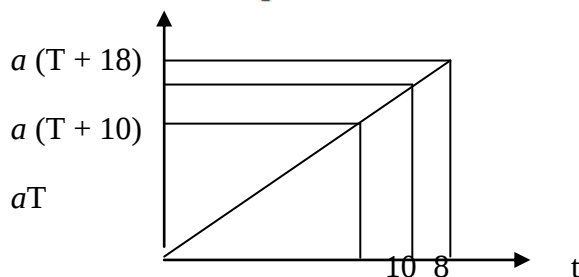
Трамвай першу половину шляху повинен рухатись рівноприскорено, а другу – рівносповільнено.



Задача 3. Пасажир, запізнившись на потяг, помітив, що передостанній вагон пройшов крізь нього за $t_1 = 10$ с, а останній – за $t_2 = 8$ с. Вважаючи рух потяга рівноприскореним, визначте час його спізнання.

Графічний розв'язок даної задачі базується на тому, що площа під графіком швидкості рівна чисельно пройденому шляху. Оскільки ділянки шляху за час t_1 і t_2 – це рівні довжини вагонів, то

$$\frac{T + (T+10)}{2} \cdot 10 = \frac{(T+10) + (T+18)}{2} \cdot 8, T = 31 \text{ с.}$$



Задача 4. Звук від падаючого в глибокий колодязь камінця прийшов через 4 с. вважаючи швидкість звуку в повітрі рівною 330 м/с, визначити глибину колодязя.

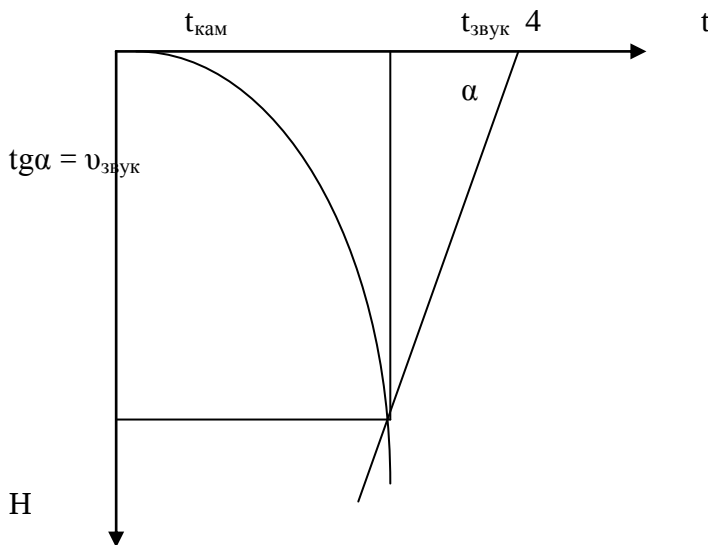
Поряд з аналітичним розв'язком системи рівнянь за умовою даної задачі

$$t_{\text{кам}} + t_{\text{звук}} = 4$$

$$v_{\text{звук}} t_{\text{кам}} = \frac{g t_{\text{кам}}^2}{2} = H_{\text{кам}}$$

який приводить до рішення квадратного рівняння, корисно знати і графічний спосіб розв'язування.

Вітка параболи визначає рівноприскорене вільне падіння камінця. Пряма, проведена з точки 4 с, визначає рівномірний рух звукової хвилі. Тангенс кута її нахилу до горизонтальної осі відповідає відомій швидкості звуку. А перетин цих ліній показує глибину колодязя, час польоту камінця та проходження звуку.



Задача 5. Тіло масою m лежить на горизонтальному столі. До тіла прикладена сила F під кутом α до горизонту, причому $F \sin \alpha < mg$. Знайти залежність сили тертя від кута α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$). Коефіцієнт тертя тіла об стіл μ .

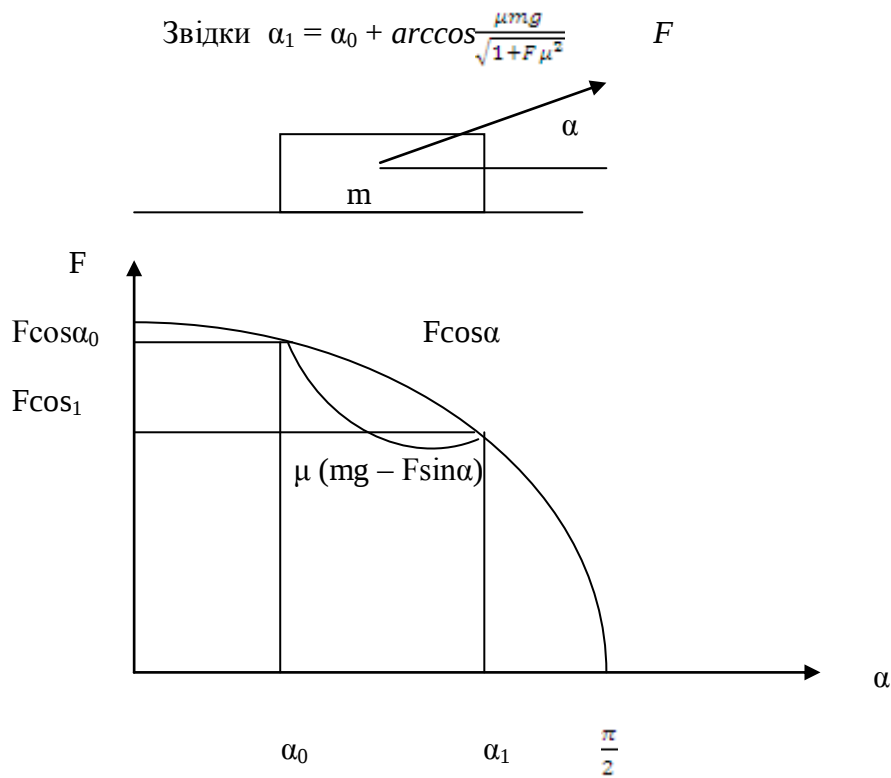
Відомо, що рівномірний рух тіла по столу починається при $\alpha_0 = \arctg \mu$. У цьому випадку сила тертя рівна $F \cos \alpha_0$. З другого боку, це сила тертя ковзання і дорівнює вона μN , де $N = mg - F \sin \alpha_0$. При деякому подальшому зростанні кута α значення $F \sin \alpha$ зростає, а значення сили тертя ковзання зменшується. Це відбувається до тих пір, поки $F \cos \alpha_1$ не стане рівною $\mu(mg - F \sin \alpha_1)$. Після чого сила тертя рівна $F \cos \alpha$ до досягнення куту α значення $\frac{\pi}{2}$. Розглянемо тепер інтервал зміни α від 0° до α_0 . Припустимо, що тіло покоїться. Тоді сила тертя рівна $F \cos \alpha$. Графік залежності $F_{\text{тер}}$ від кута α дає цілісну і повну уяву цієї залежності.

Визначимо кут α_1 . Нагадаємо, що $F \cos \alpha_1 = \mu (mg - F \sin \alpha_1)$, звідки

$$\mu \sin \alpha_1 + \cos \alpha_1 = \frac{\mu mg}{F} \quad \text{або} \quad \sqrt{1 + \mu^2} \left(\frac{\mu}{1 + \mu^2} \sin \alpha_1 + \frac{1}{1 + \mu^2} \cos \alpha_1 \right) = \frac{\mu mg}{F}$$

$$\text{Покажемо, що } \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} = \sin \alpha_0 \text{ і } \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} = \cos \alpha_0.$$

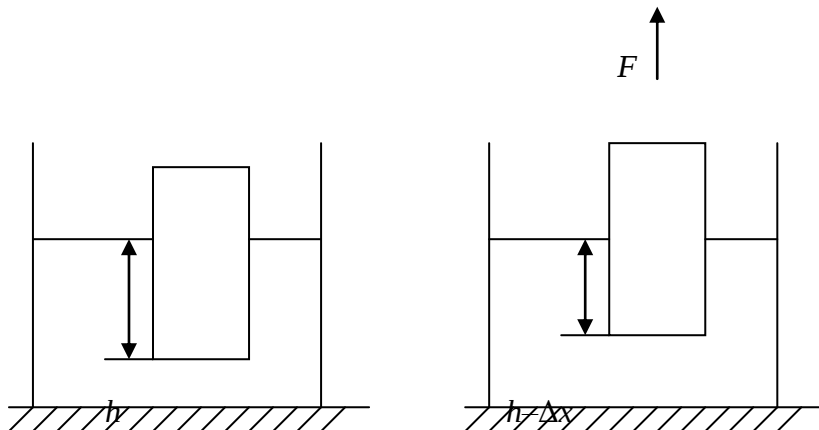
$$\text{Скористаємось тим, що } \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta = \cos (\alpha - \beta), \quad \cos (\alpha_1 - \alpha_0) = \frac{\mu mg}{\sqrt{1 + F \mu^2}}$$



Задача 6. Дерев'яний брусок у формі паралелепіпеда плаває у воді і занурений на глибину h . Яку мінімальну роботу потрібно виконати, щоб дістати його із води? Площа горизонтального перерізу бруска S , опором води знехтувати.

Те, що брусок плаває у воді, означає, що сила тяжіння, яка на нього діє, зрівноважується виштовхувальною силою рідини:

$mg = \rho_{\text{в}} S h g$, де m — маса бруска, g — прискорення вільного падіння (стала земного тяжіння), $\rho_{\text{в}}$ — густина води, S — площа поперечного перерізу бруска, h — глибина його занурення.



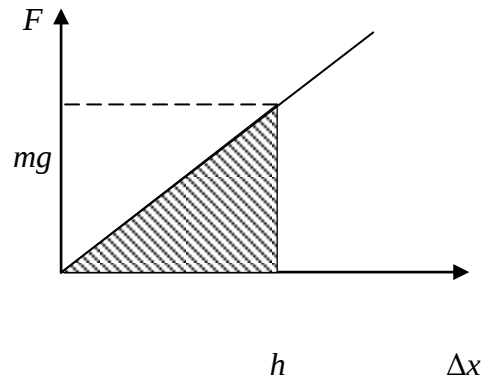
Щоб підняти брусок на висоту Δx , потрібно прикласти силу:

$$F = mg - \rho_b S(h - \Delta x)g, \text{ або } F = \rho_b Shg - \rho_b S(h - \Delta x)g ;$$

$$F = \rho_b S \Delta x g.$$

Зауважуємо, що прикладена сила F зростає прямо пропорційно зменшенню глибини занурення Δx .

Графіком залежності зовнішньої сили від зменшення глибини занурення є пряма лінія.



З малюнка видно, що робота зовнішньої сили чисельно дорівнює площі заштрихованого трикутника, тому

$$A = (Fh)/2.$$

$$\text{Остаточно одержимо: } A = (\rho_b g S h^2)/2.$$

Задача 7. Де треба розмістити опору, щоб важіль перебував у рівновазі?

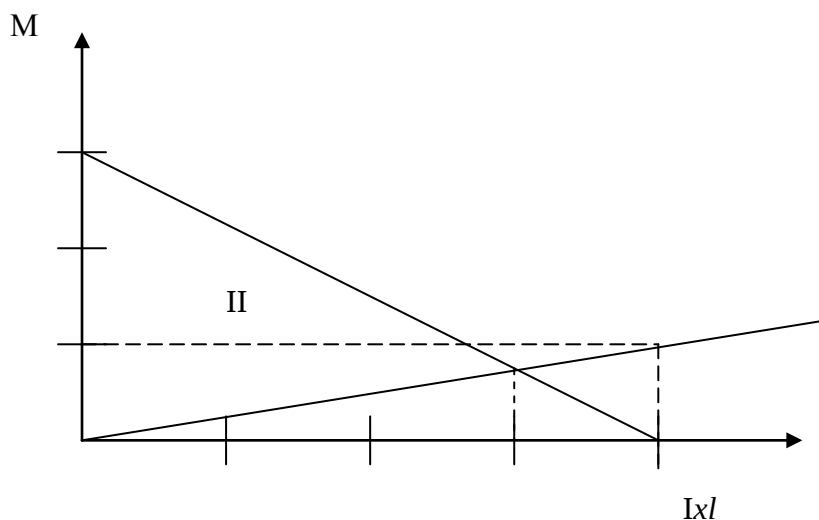


$$m_1 = 50 \text{ г}$$

$$m_2 = 150 \text{ г}$$

Графічний спосіб розв'язку ґрунтується на тому, що момент сили пропорційний величині плеча важеля і прикладеній силі, а прикладена сила — масі підвішених тіл (масою важеля нехтуємо).

На основі цього будуюмо графіки залежності моменту сили від довжини плеча для кожного з тіл.



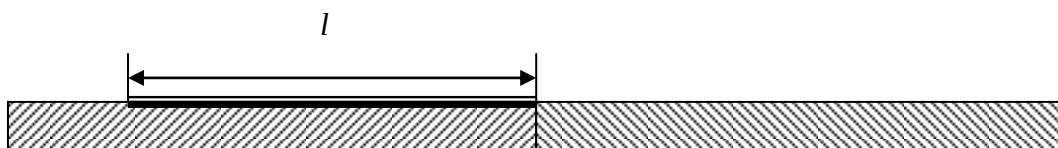
За умовою рівноваги важеля опору потрібно розмістити так, щоб моменти сил прикладених до його плечей були рівні. На графіку цьому положенню відповідає точка перетину графіків.

Скориставшись лінійкою можна встановити відношення плечей.

Відповідь: $l_1/l_2 = 3/1$

Задача 8. Ланцюг масою m і довжиною l лежить біля межі двох дотичних горизонтальних напівплощин з різних матеріалів. Яку роботу слід виконати, щоб пересунути ланцюг на другу напівплощину?

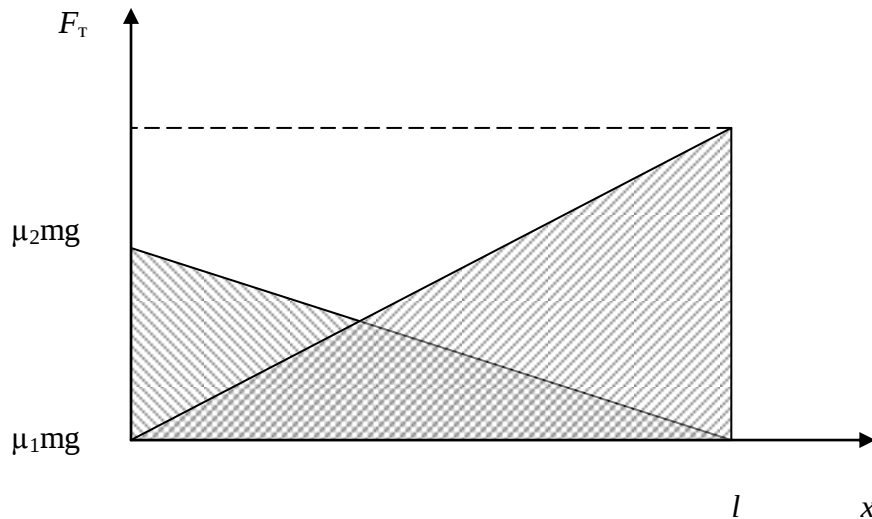
Коефіцієнти тертя напівплощин з ланцюгом відповідно рівні μ_1 і μ_2 .



Щоб пересунути ланцюг потрібно виконати роботу по подоланню сили тертя між ним і півплощинами.

Побудуємо графіки залежності величини сили тертя від частини довжини ланцюга, що лежить на кожній з півплощин.

Сила тертя, що виникає між півплощиною і ланцюгом прямопропорційна масі тієї частини ланцюга, яка знаходиться на ній. В свою чергу маса частини ланцюга прямопропорційна тій його довжині, що лежить на півплощині. Отже, сила тертя між ланцюгом і півплощиною прямопропорційна тій його довжині, що лежить на півплощині.



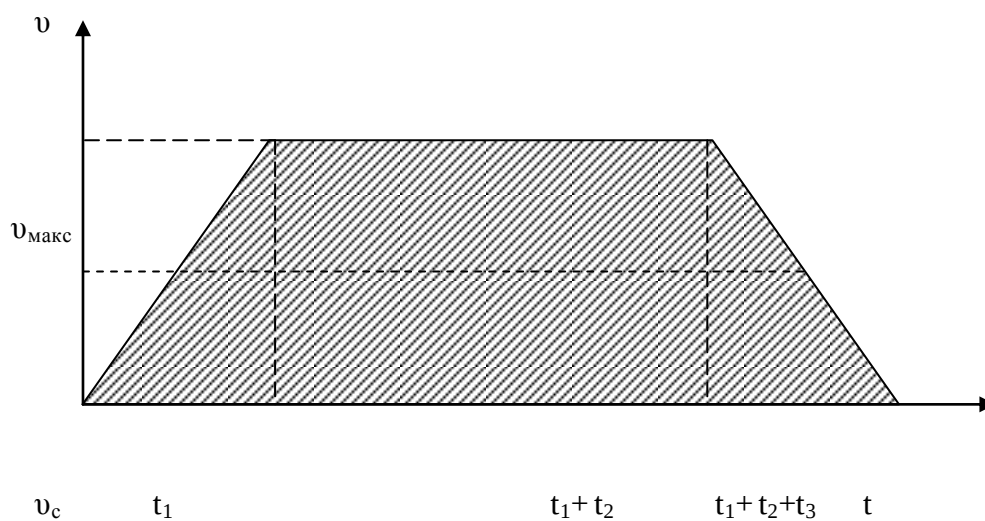
Робота по переміщенню ланцюга рівна сумі площ заштрихованих трикутників, які зображено на графіку.

Отже,

$$A = \mu_1 mgl/2 + \mu_2 mgl/2, \text{ або } A = mgl(\mu_1 + \mu_2)/2$$

Задача 9. Відстань між двома станціями s потяг метро проходить середньою швидкістю v_c . При цьому на розгін він витрачає час t_1 , потім йде рівномірно якийсь час t_2 і на уповільнення до повної зупинки витрачає час t_3 . Визначити максимальну швидкість потяга $v_{\text{макс}}$.

Побудуємо графік швидкості потяга.



Пройдений шлях рівний площі трапеції, що обмежена графіком швидкості і віссю часу t :

$$s = v_{\text{макс}}(t_1+t_3)/2 + v_{\text{макс}}t_2, \text{ або } s = v_c(t_1+t_2+t_3).$$

З останнього рівняння знайдемо t_2 і підставимо у перше:

$$t_2 = s/v_c - (t_1 + t_3),$$

$$s = v_{\text{макс}}(t_1+t_3)/2 + v_{\text{макс}} \cdot (s/v_c - (t_1 + t_3)).$$

$$\text{Остаточно одержимо: } v_{\text{макс}} = s/(s/v_c - (t_1 + t_3)).$$

Задача 10. Металевий суцільний циліндр діаметром D обертається навколо своєї осі з частотою ν . Визначити напруженість електричного поля, що виникає усередині нього, як функцію відстані до осі і різницю потенціалів між віссю і периферією циліндра.

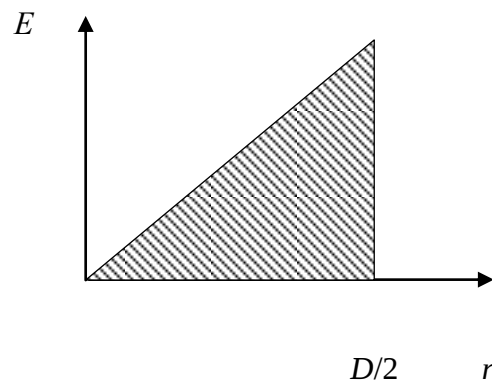
На відстані r від осі циліндра напруженість електричного поля повинна бути такою, щоб сила, що діє з боку цього поля на електрон, зрівноважувала відцентрову силу.

$$eE = ma; a = 4\pi^2\nu^2 r.$$

Звідси

$$(*) E = 4\pi^2\nu^2 rm/e, E \sim r.$$

Зобразимо графічно залежність $E(r)$.



Шукана різниця потенціалів рівна роботі, яку потрібно виконати при перенесенні одиничного заряду від периферії до осі циліндра, тобто рівна заштрихованій площі на графіку.

$$\Delta\varphi = E \cdot D/4.$$

Врахувавши формулу (*):

$$\Delta\varphi = \pi^2 v^2 D^2 m / (2e).$$

Задача 11. Хлопчик пливе з швидкістю, вдвічі меншою за швидкість течії річки. У якому напрямі він повинен пливти до другого берега, щоб його знесло течією якомога менше?

Швидкість хлопчика відносно берега $\vec{v}$ рівна геометричній сумі швидкості течії $\vec{v}_t$ та швидкості хлопчика відносно води $\vec{v}_x$.

Розв'язок знайдемо з геометричної побудови.

На малюнку покажемо вектор $\vec{v}_t$. Від нього будемо відкладати вектор $\vec{v}_x$. Оскільки напрям вектора $\vec{v}_x$ поки невідомий, то побудуємо геометричне місце точок його кінця, тобто коло, центр якого співпадає з кінцем вектора $\vec{v}_t$. Сумою цих векторів буде вектор $\vec{v}$, початок якого співпадає з початком вектора $\vec{v}_t$, а кінець лежатиме на колі. Напрямок цього вектора вказує на напрям руху хлопчика відносно берега. Для задоволення умови задачі кут β між напрямом руху течії і напрямом руху хлопчика відносно берега повинен бути максимальним. Це можливо тоді, коли вектор $\vec{v}$ лежить на дотичній до кола. В такому випадку точка дотику буде кінцем вектора $\vec{v}_x$. Кут між дотичною і радіусом кола проведеним у точку дотику прямий.

Знайдемо кут між напрямом швидкості хлопчика і берегом із співвідношення:

$$\cos\alpha = v_x / v_t,$$

$$\cos\alpha = 1/2,$$

$$\alpha = 60^\circ.$$

