

Заняття 4 Векторний метод розв'язування геометричних задач. Теорема косинусів для чотирикутників.

Це потрібно знати!

При розв'язуванні геометричних задач векторним методом потрібно від геометричної умови перейти до векторного опису.

Що потрібно знайти або довести (геометричною мовою)	Що достатньо довести або знайти (векторною мовою)
C – точка прямої AB	$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$
$AB \parallel CD$	$\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{CD}$
M – точка відрізка AB , $AM : MB = m : n$	1) $\overrightarrow{AM} = \frac{m}{n}\overrightarrow{MB}$ 2) Для будь-якої точки X виконується рівність $\overrightarrow{XM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}$ 3) Якщо M -середина відрізка AB формула набуває вигляду $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})$
Прямі AB і CD перпендикулярні	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$
Знайти довжину відрізка	1) Вибрати два неколінеарні вектори у яких відомі довжини та кут між ними 2) Розкласти вектор довжина якого обчислюється 3) Знайти скалярний квадрат вектора за формулою $ \vec{a} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$
Знайти градусну міру кута	1) Вибрати два неколінеарні вектори про яких відоме відношення їх довжин та градусна міра кута між ними 2) Вибрати вектори які задають заданий кут та розкласти їх по базисним 3) Обчислити $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \cdot \vec{b} }$

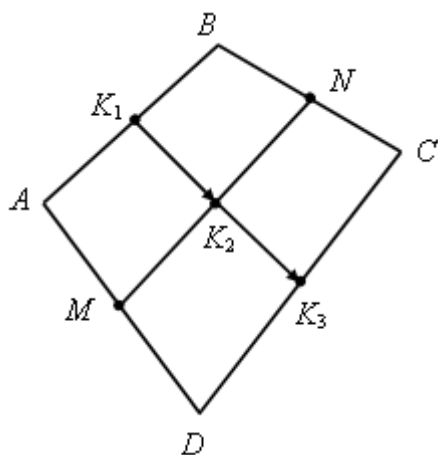
Якщо тотожність $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ піднести до квадрату, можна отримати твердження, яке називають теоремою косинусів для чотирикутників.

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab \cos \angle B - 2ac \cos \omega - 2bc \cos \angle C$$

де ω - кут між прямими AB і CD , або

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab \cos \angle B + 2ac \cos(\angle A + \angle D) - 2bc \cos \angle C$$

Це потрібно вміти!



Приклад 1. Точки M і N лежать відповідно на сторонах AD і BC чотирикутника $ABCD$, причому $AM : MD = BN : NC = 3 : 4$.

Доведіть, що середини відрізків AB , MN і CD лежать на одній прямій.

Розв'язання: Нехай K_1 – середина AB , K_2 – середина MN , K_3 – середина CD . Тоді

$$\overrightarrow{K_1 K_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN}), \quad \overrightarrow{K_1 K_3} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$

За умовою $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BC}$, тому

$$\overrightarrow{K_1 K_2} = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{3}{7}\overrightarrow{K_1 K_3}$$

Отже, вектори $\overrightarrow{K_1 K_2}$ та $\overrightarrow{K_1 K_3}$ колінеарні, точки K_1, K_2, K_3 лежать на одній прямій.

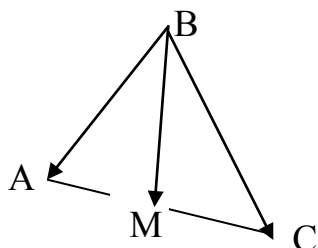
Приклад 2. У трикутнику ABC $AB = 4$ см, $BC = 6\sqrt{3}$ см, $\angle ABC = 30^\circ$. Знайдіть довжину медіани BM .

Розв'язання:

Якщо M – середина AC , запишемо $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BM}^2 &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2) \\ &= \frac{1}{4}(|\overrightarrow{BA}|^2 + 2|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}| \cdot \cos \angle ABC + |\overrightarrow{BC}|^2) = \\ &= \frac{1}{4}\left(16 + 48\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 108\right) = 49. \end{aligned}$$

Отже, $BM^2 = 49$; $BM = 7$ см.



Відповідь: 7 см.

Приклад 3. Дано точки A і B . Знайдіть геометричне місце точок C таких, що медіани AA_1 і BB_1 трикутника ABC перпендикулярні.

Розв'язання: Оберемо систему координат так, щоб $A(0;0)$,

$B(1;0)$. Нехай $C(x;y)$ – вершина трикутника ABC . Очевидно, $y \neq 0$.

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{BB_1}$. Маємо: $\overrightarrow{AA_1} \left(\frac{x+1}{2}; \frac{y}{2} \right)$, $\overrightarrow{BB_1} \left(\frac{x-2}{2}; \frac{y}{2} \right)$.

Точка C належить шуканому ГМТ тоді і тільки тоді, коли $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BB_1} = 0$ і $y \neq 0$. Маємо

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} \cdot \frac{x-2}{2} + \frac{y^2}{4} = 0, \\ y \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}, \\ y \neq 0. \end{cases}$$

Отже, шуканим ГМТ є коло радіуса $\frac{3}{2}AB$ з центром у середині відрізка AB , за винятком точок, які належать прямій AB .

Спробуй виконати сам!

1. На відрізку AB позначено точку C так, що $AC : CB = 2 : 3$. Доведіть, що для будь-якої точки O виконується рівність

$$\overrightarrow{OC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB}.$$

2. Точка K ділить відрізок MN у відношенні $MK : KN = 3 : 2$. Виразіть вектор $\overrightarrow{AM}$ через вектори $\vec{a} = \overrightarrow{AK}$ і $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$, якщо A – будь-яка точка.

Відповідь: $2,5\vec{a} - 1,5\vec{b}$.

3. Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають спільний початок у вершині ромба, а кінці векторів у сусідніх вершинах ромба. Знайдіть кут між векторами $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ та $\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$.

Відповідь: 90° .

4. Точки K, L, M, N – середини сторін AB, BC, CD, DE п'ятикутника $ABCDE$, а точки P і Q – середини відрізків KM і LN відповідно. Доведіть, що $PQ \parallel AE$ і $PQ = \frac{1}{4}AE$.

5. Доведіть, що в паралелограмі сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів його сторін.

Вказівка: Виразіть діагоналі паралелограма через його сторони.