

Заняття 3. Скалярний добуток векторів

Це потрібно знати!

Скалярним добутком двох ненульових векторів називають добуток їх модулів і косинуса кута між ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}; \vec{b});$$

Зверніть увагу, що скалярним добутком векторів є не вектор, а число!

Скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{a}$ називають скалярним квадратом вектора $\vec{a}$.

Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля. $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

Скалярний добуток векторів $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ можна обчислити за формулою $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

Властивості скалярного добутку векторів

Якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то $\vec{a} = \vec{0}$ або $\vec{b} = \vec{0}$ або $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Скалярний добуток ненульових векторів дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли ці вектори перпендикулярні.

Для будь-яких векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ і будь-якого числа k виконуються рівності:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$$

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

Розглянуті властивості разом з властивостями додавання векторів і множення вектора на число дозволяють працювати з векторами як зі звичайними алгебраїчними виразами. Наприклад,

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

Косинус кута між ненульовими векторами $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ можна обчислити за формулою

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Отже, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \angle(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$;

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow \angle(\vec{a}; \vec{b}) < 90^\circ;$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow \angle(\vec{a}; \vec{b}) > 90^\circ.$$

Це потрібно вміти!

Приклад 1. Відомо, що $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$. Кут між векторами 120° . Знайдіть

- 1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$;
- 2) $(3\vec{a} - 2\vec{b})(2\vec{a} + \vec{b})$;
- 3) $|3\vec{a} - 2\vec{b}|$;
- 4) $|2\vec{a} + \vec{b}|$;
- 5) $\cos \angle(3\vec{a} - 2\vec{b}; 2\vec{a} + \vec{b})$.

Розв'язання:

- 1) За означенням скалярного добутку $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ = -3$
- 2) $(3\vec{a} - 2\vec{b})(2\vec{a} + \vec{b}) = 6 + 3$
- 3) Оскільки скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля, то $|3\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = (3\vec{a} - 2\vec{b})^2$.

$$\begin{aligned} |3\vec{a} - 2\vec{b}| &= \sqrt{(3\vec{a} - 2\vec{b})^2} = \\ &= \sqrt{9\vec{a}^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2} = \\ &= \sqrt{9|\vec{a}|^2 - 12|\vec{a}||\vec{b}| \cos 120^\circ + 4|\vec{b}|^2} = \sqrt{36 + 36 + 36} = 6\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$4) |2\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(2\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{4\vec{a}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{16 - 12 + 9} = \sqrt{13}$$

$$5) \cos \angle(3\vec{a} - 2\vec{b}; 2\vec{a} + \vec{b}) = \frac{(3\vec{a} - 2\vec{b})(2\vec{a} + \vec{b})}{|3\vec{a} - 2\vec{b}||2\vec{a} + \vec{b}|} = \frac{9}{6\sqrt{3}\sqrt{13}} = \frac{3}{2\sqrt{39}} = \frac{\sqrt{39}}{26}$$

Приклад 2. Доведіть, що чотирикутник з вершинами в точках $A(-4;2)$, $B(-3;5)$, $C(0;4)$ і $D(-1;1)$ є квадратом.

Доведення: Знайдемо координати векторів $\overline{AB}$ і $\overline{DC}$: $\overline{AB}(1;3)$, $\overline{DC}(1;3)$. Вектори рівні, отже відрізки AB і DC паралельні та рівні. $ABCD$ – паралелограм. Знайдемо координати, модулі та скалярний добуток векторів $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$: $\overline{AC}(4;2)$, $\overline{BD}(2;-4)$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}; \quad |\overline{BD}| = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}; \quad AC = BD$$

$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 4 \cdot 2 - 2 \cdot 4 = 0$. Отже, скалярний добуток ненульових векторів дорівнює нулю, $\overline{AB}$ і $\overline{BD}$ - перпендикулярні.

$ABCD$ – квадрат.

Спробуй виконати сам!

1. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

$$\vec{a}(2; 5), \vec{b}(-5; 6)$$

Відповідь: 20.

2. $ABCD$ – ромб, сторона якого 6 см, $\angle ABC = 120^\circ$. Знайдіть скалярний добуток векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$; $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$.

Відповідь: 18; 0

3. При яких значеннях x вектори $\vec{a}(2x; -3)$ і $\vec{b}(x; 6)$ перпендикулярні?

Відповідь: 3 або -3

4. Знайти косинуси кутів трикутника з вершинами $A(1; \sqrt{3})$, $B(1; -\sqrt{3})$, $C(\frac{1}{2}; \sqrt{3})$. Який це трикутник?

Відповідь: $\frac{1}{2}$; $\frac{13}{14}$; $-\frac{1}{7}$, трикутник тупокутний.

Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, кут між векторами дорівнює 120° .

Знайдіть $|4\vec{a} + 3\vec{b}|$.

Відповідь: $6\sqrt{3}$.