

Заняття 2. Множення вектора на число

Це потрібно знати!

Добутком ненульового вектора $\vec{a}$ і числа k , відмінного від нуля, називають такий вектор $\vec{b}$, що

$$1) |\vec{b}| = |k| |\vec{a}|;$$

$$2) \text{ якщо } k > 0, \text{ то } \vec{b} \uparrow \vec{a}, \text{ якщо } k < 0, \text{ то } \vec{b} \updownarrow \vec{a}.$$

Якщо $\vec{a}(a_1; a_2)$; , то вектор $k\vec{a}$ має координати $(ka_1; ka_2)$.

Властивості множення вектора на число:

$$(km) \vec{a} = k(m\vec{a}) \quad \text{сполучна властивість}$$

$$(k + m) \vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a} \quad \text{перша розподільна властивість}$$

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b} \quad \text{друга розподільна властивість}$$

Ці властивості дозволяють перетворювати вирази, які містять суму, різницю векторів і добуток вектора на число аналогічно тому, як це робимо в алгебрі. Наприклад, $2(\vec{a} - 3\vec{b}) + 3(\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} - 6\vec{b} + 3\vec{a} + 3\vec{b} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$

Вектори $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(kb_1; kb_2)$ колінеарні.

Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – не колінеарні вектори. Тоді для будь якого вектора $\vec{c}$ існує єдина пара чисел $(x; y)$ така, що $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Упорядковану пару $(\vec{a}; \vec{b})$ неколінеарних векторів називають базисом. Якщо для вектора $\vec{c}$ виконується рівність $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, то говорять, що вектор $\vec{c}$ розкладено за базисом $(\vec{a}; \vec{b})$.

$(x; y)$ – координати вектора $\vec{c}$ в базисі $(\vec{a}; \vec{b})$

Це потрібно вміти!

Приклад 1. Побудувати вектор $\frac{3}{7}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{14}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$

Розв'язання:

$$\frac{3}{7}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{14}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{7}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{7}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}) - \frac{1}{14}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{7}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) - \frac{1}{14}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{14}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

Приклад 2. Довести теорему про середню лінію трикутника.

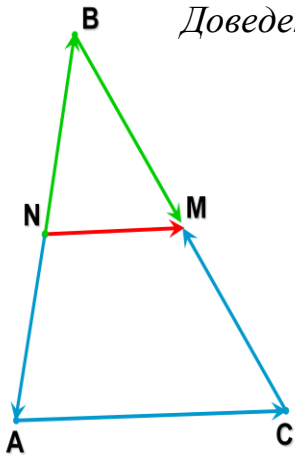
$$MN \parallel AC, MN = 0,5AC$$

Доведення: $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BM}$ з трикутника NBM

$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} \text{ з чотирикутника NACM}$$

$$\text{Додаємо рівності: } 2\overrightarrow{NM} = (\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NA}) + \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM}) = \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{NM} = 0,5\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{NM} \uparrow \overrightarrow{AC}, |\overrightarrow{NM}| = 0,5|\overrightarrow{AC}|$$

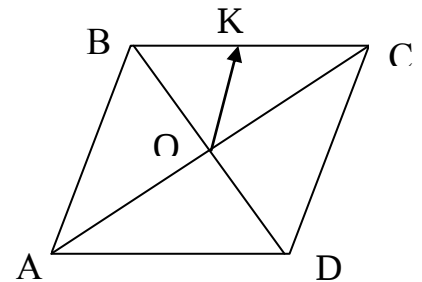


Приклад 3. У паралелограмі ABCD діагоналі перетинаються в точці O. На стороні BC позначено точку K так, що $BK : KC = 2 : 3$. Розкладіть вектор $\overrightarrow{OK}$ за базисом $(\vec{a}; \vec{b})$, де $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OK} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BK} = 0,5\overrightarrow{DB} + 0,4\overrightarrow{AD} = \\ &= 0,5(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) + 0,4\overrightarrow{AD} = \\ &= -0,5\overrightarrow{AD} + 0,5\overrightarrow{AB} + 0,4\overrightarrow{AD} = 0,5\vec{a} - 0,1\vec{b} \end{aligned}$$

Відповідь: $0,5\vec{a} - 0,1\vec{b}$.



Спробуй виконати сам!

- Нехай $\vec{x} = \vec{m} + \vec{n}$, $\vec{y} = \vec{m} - \vec{n}$. Виразить $2\vec{x} - 2\vec{y}$, $2\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$.

Відповідь: $4\vec{n}$; $2\frac{1}{2}\vec{m} + 1\frac{1}{2}\vec{n}$.

- Побудувати вектор $-\frac{5}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC})$

Відповідь: $-\frac{5}{4}\overrightarrow{AC}$

- ABCD – паралелограм. Побудувати вектор $\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{10}\overrightarrow{CA} - \frac{2}{5}\overrightarrow{DA}$

Відповідь: $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

- Довести теорему про середню лінію трапеції.
 - На сторонах AC і BC трикутника ABC позначено відповідно точки M і N так, що $AM : MC = 1:3$ і $BN : NC = 4 : 3$. Розкладіть вектори $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AN}$ за базисом $(\vec{k}; \vec{p})$, де $\overrightarrow{BN} = \vec{k}$, $\overrightarrow{AM} = \vec{p}$.
- Відповідь: $\overrightarrow{BA} = 1,75\vec{k} - 4\vec{p}$; $\overrightarrow{AN} = 4\vec{p} - 0,75\vec{k}$