

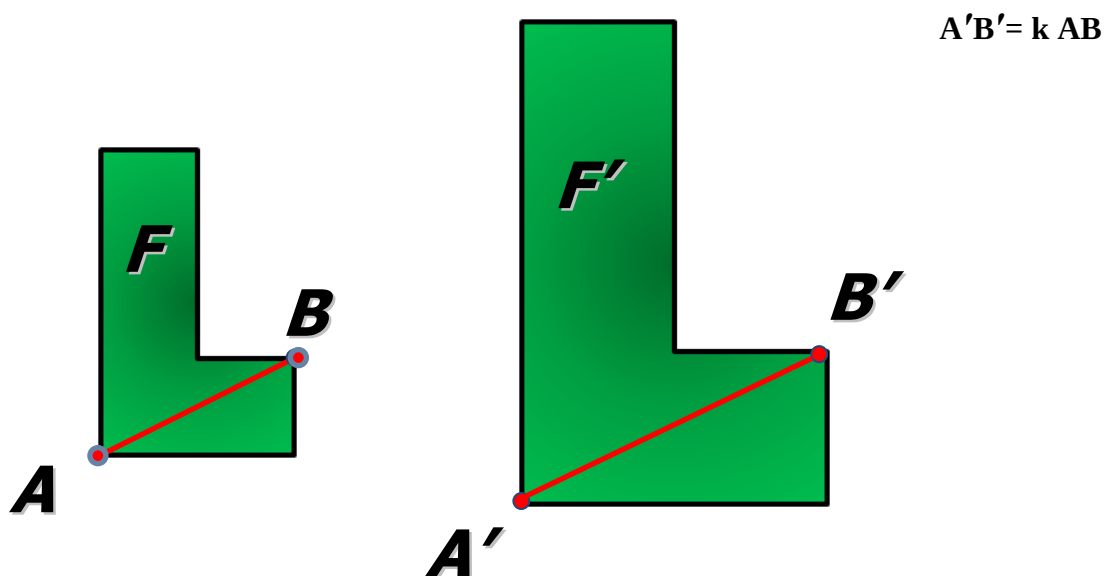
Заняття 5 Перетворення подібності та його властивості. Гомотетія



Перетворенням подібності (подібністю) називається таке перетворення фігури F у фігуру F' , внаслідок якого відстань між точками змінюється в тому самому відношенні k ($k > 0$). Число $k > 0$ називається коефіцієнтом подібності.

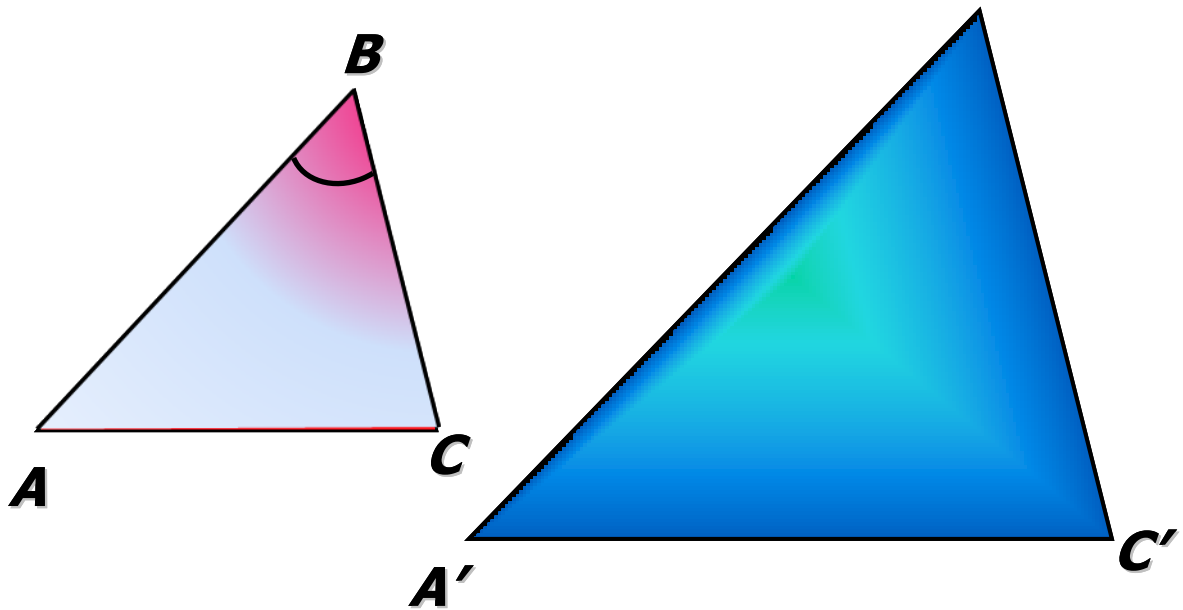
Якщо $k=1$, то маємо переміщення.

Переміщення – окремий випадок подібності.



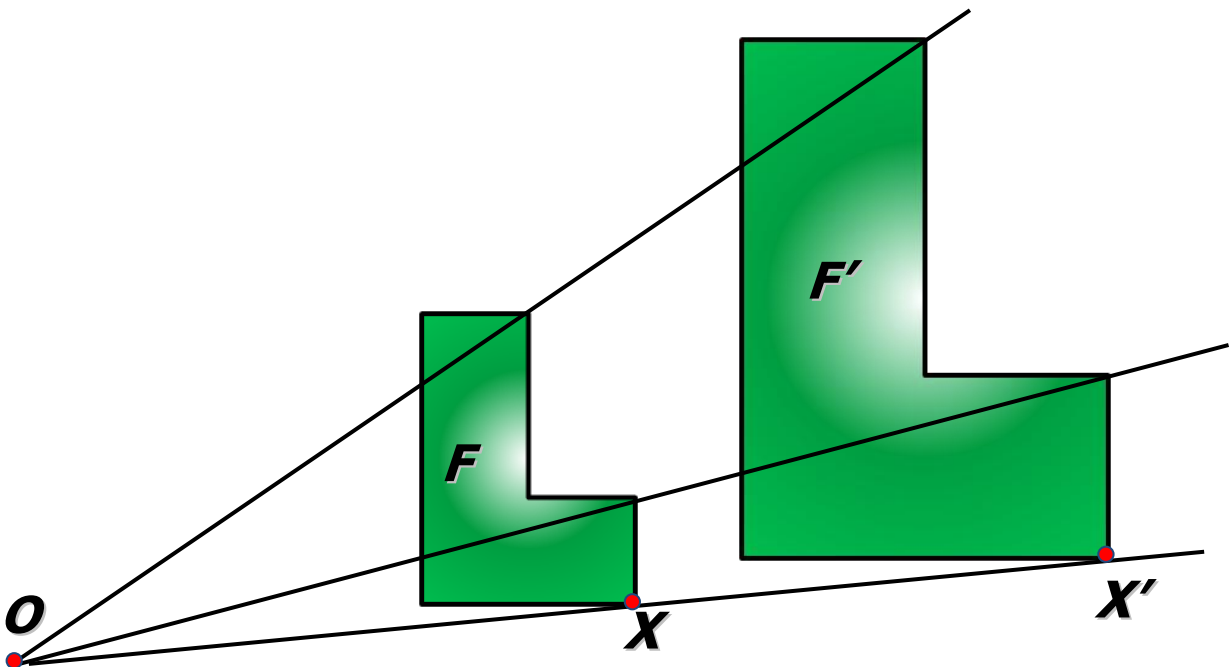
Властивості перетворення подібності

- 1) Перетворення подібності переводить прямі в прямі, промені – в промені, відрізки – у відрізки.
- 2) Кожна фігура подібна сама собі з коефіцієнтом подібності $k=1$.
- 3) Перетворення подібності зберігає кути між променями.



Трикутник ABC подібний трикутнику $A'B'C'$. $\angle ABC = \angle A'B'C'$.

Гомотетією з центром O називається таке перетворення фігури F у фігуру F' , внаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F' так, що точка X' лежить на промені OX і $OX' = k \cdot OX$ (k – фіксоване додатне число).



Число k – коефіцієнт гомотетії, фігури F і F' називають гомотетичними.

Гомотетія є перетворенням подібності.

Властивості гомотетії

Гомотетія з коефіцієнтом k є перетворенням подібності з коефіцієнтом k .

- При гомотетії пряма переходить у паралельну їй пряму або сама в себе; відрізок – у паралельний йому відрізок; кут – у рівний йому кут.
- На координатній площині гомотетія точок $A(x; y)$ і $B(x_1; y_1)$ задається формулами: $x_1 = kx$; $y_1 = ky$.

Відношення площ подібних фігур дорівнює квадрату коефіцієнта їх подібності, тобто, площі подібних фігур пропорційні квадратам їх лінійних розмірів (наприклад, сторін). Так, площі кіл пропорційні відношенню квадратів їх діаметрів (або радіусів).

Слід зазначити, що відношення периметрів двох подібних фігур дорівнює коефіцієнту їх подібності.

1. Периметри подібних багатокутників відносяться як $5 : 7$, а різниця площ дорівнює 864 см^2 . Знайдіть площі багатокутників.

Розв'язання

Нехай $S \text{ см}^2$ — площа меншого багатокутника, тоді $(S + 864) \text{ см}^2$ — площа більшого багатокутника.

Маємо $\frac{S}{S+864} = \left(\frac{5}{7}\right)^2$, тоді $49S = 25(S + 864)$; $24S = 21600$; $S = 900 \text{ см}^2$.

Отже, площа меншого багатокутника дорівнює 900 см^2 , а площа більшого $900 + 864 = 1764 \text{ (см}^2\text{)}$.

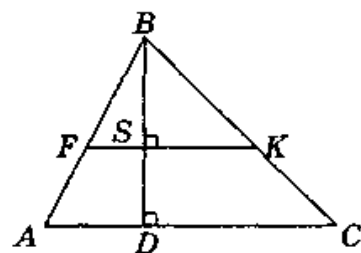
Відповідь. 900 см^2 і 1764 см^2 .

2. Пряма, перпендикулярна до висоти трикутника, ділить його площу навпіл. Знайдіть відстань від цієї прямої до вершини трикутника, з якої проведено висоту, якщо вона дорівнює h .

Розв'язання

Нехай у трикутнику ABC , $BD \perp AC$, $FK \perp BD$, $S_{\triangle FBK} \propto S_{\triangle FKC}$, $BD = h$.

$\triangle FBK \propto \triangle ABC$ (за двома кутами), тоді $\frac{S_{\triangle FBK}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{BS}{BD}\right)^2$.



Враховуючи, що $S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle FBK}$ $BD = h$, маємо $\frac{1}{2} = \frac{BS^2}{h^2}$, звідси $BS^2 = \frac{h^2}{2} BS$,
або $BS = \sqrt{\frac{h^2}{2}} = \frac{h}{\sqrt{2}}$. *Відповідь.* $\frac{h}{\sqrt{2}}$.

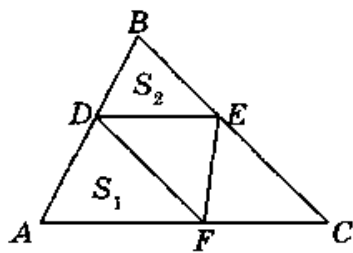
3. На стороні AB трикутника ABC взято довільну точку D і з неї проведено відрізки DE і DF так, що $DE \parallel AC$, $DF \parallel BC$. Знайдіть площу трикутника CEF , якщо площі трикутників ADF і BED відповідно дорівнюють S_1 і S_2

Розв'язання

Нехай S — площа трикутника CEF . $\triangle ADF \sim \triangle BED$ (оскільки кожний із них подібний трикутнику ABC).

$$\text{Отже, } \frac{S_2}{S_1} = \frac{DE^2}{AF^2} = \frac{FC^2}{AF^2}, \text{ звідси } \frac{FC}{AF} = \sqrt{\frac{S_2}{S_1}}.$$

Висоти трикутників ADF і FEC , проведені до сторін AF і FC , рівні між собою.



$$\text{Тоді } \frac{S}{S_1} = \frac{FC \cdot h}{AF \cdot h} = \frac{FC}{AF} = \sqrt{\frac{S_2}{S_1}}, \text{ звідси } S = S_1 \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} =$$

$$\sqrt{S_1 \cdot S_2}.$$

$$\text{Відповідь. } \sqrt{S_1 \cdot S_2}.$$

Спробуй виконати сам!

1. Побудуйте довільний трикутник і позначте точку O , яка лежить поза трикутником. Побудуйте трикутник, гомотетичний даному трикутнику з центром гомотетії в точці O і коефіцієнтом $k = 2$.
2. Сторони многокутника відносяться як $3:4:5:6:2$. Знайдіть сторони подібного йому многокутника, якщо його периметр дорівнює 80 см. *Відповідь:* 12 см; 16 см; 20 см; 24 см; 8 см.
3. Сторони двох правильних n -кутників відносяться як $a:b$. Як відносяться їхні площі? *Відповідь.* $a^2:b^2$.
4. Площі двох квадратів відносяться як $3:5$. Чому дорівнює сторона меншого квадрата, якщо сторона більшого квадрата дорівнює 10 см

Відповідь: $\sqrt{60}$ (см).

5. Площа меншого многокутника дорівнює 45 см^2 . Чому дорівнює площа більшого многокутника, подібного даному, якщо відповідні сторони многокутників дорівнюють 10 см і 15 см? Відповідь. $101,25 \text{ см}^2$.