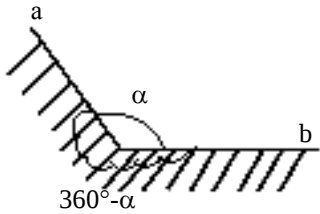


Урок №3 Тема: Кут у колі. Центральний кут, вписаний кут.

Властивості вписаних кутів. Кут між дотичною і січною.

Це потрібно знати!

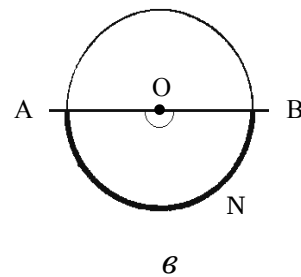
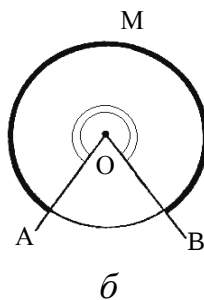
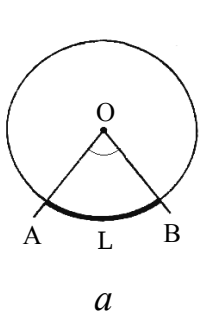
Градусна міра дуги



На рисунку кут (α) ділить площину на дві частини, кожна з яких називається *плоским кутом*. Їхні градусні міри дорівнюють α і $(360^\circ - \alpha)$.

Застосуємо поняття плоского кута для означення центрального кута у колі.

Центральним кутом у колі називається плоский кут з вершиною в центрі кола.



На рисунку *a, б* сторони кута з вершиною в центрі кола O перетинають дане коло в точках A і B . При цьому утворюються дві дуги, одна з яких менша за півколо (на ній позначена проміжна точка L , рис. *a*), а інша – більша за півколо (на ній позначена проміжна точка M , рис. *б*).

Для того щоб уточнити, який з двох плоских кутів зі сторонами OA і OB ми розглядаємо як центральний, ми будемо вказувати дугу кола, яка *відповідає даному центральному куту* (тобто міститься всередині нього).

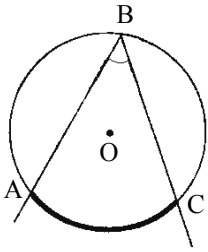
На рисунку *a* центральному куту AOB , позначеному дужкою, відповідає дуга ALB , а на рисунку *б* – дуга AMB . У випадку, коли промені OA і OB доповняльні, відповідна дуга ANB є півколом (рис. *в*).

Градусною мірою дуги кола називається градусна міра відповідного центрального кута.

Градусну міру дуги, як і саму дугу, коротко позначають так: $\cup ALB$ (або $\cup AB$). Наприклад, на рисунку *в* $\cup ANB = 180^\circ$, тобто градусна міра півкола становить 180° . Очевидно, що градусна міра дуги всього кола становить 360° .

Вписаний кут

Вписаним кутом називається кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають це коло.



що вписаний кут ABC *спирається на дугу AC* .

На рисунку зображено вписаний кут ABC . Його вершина B лежить на колі, а сторони перетинають коло в точках A і C . Дуга AC (на рисунку вона виділена) лежить всередині цього кута. У такому випадку кажуть,

Теорема (про вписаний кут)

Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.

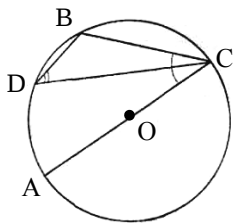
Цю теорему сформулювати інакше.

Вписаний кут дорівнює половині центрального кута, який спирається на ту саму дугу.

Задача. Знайдіть кут BDC , якщо $\angle BCA = 50^\circ$.

Розв'язання

Для того щоб знайти кут BDC , необхідно знайти градусну міру дуги BC , на яку він спирається. Але безпосередньо з даних задачі ми можемо знайти лише



градусну міру дуги AB , на яку спирається кут BCA : з теореми про вписаний кут $\cup AB = 2\angle BCA = 100^\circ$. Зазначимо, що дуги AB і BC разом складають півколо, тобто $\cup AB + \cup BC = 180^\circ$, отже, $\cup BC = 180^\circ$

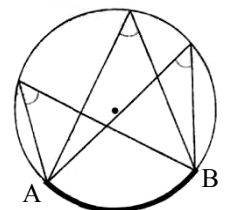
$- 100^\circ = 80^\circ$. Тоді за теоремою про вписаний кут $\angle BDC = \frac{1}{2} \cup BC = 40^\circ$.

Відповідь: 40° .

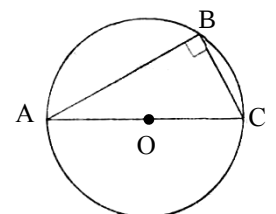
Властивості вписаних кутів

1. *Вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу, рівні.*

Справді, за теоремою про вписаний кут градусна міра кожного з вписаних кутів на рисунку дорівнює половині дуги AB .



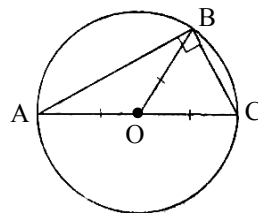
2. *Вписаний кут, що спирається на півколо, – прямий, і навпаки: будь-який прямий вписаний кут спирається на півколо.*



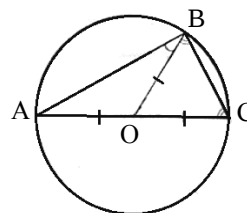
Справді, оскільки градусна міра півкола дорівнює 180° , то кут ABC , що спирається на півколо, дорівнює 90° .

3. Центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є середина гіпотенузи. Медіана прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, дорівнює половині гіпотенузи.

Перше з наведених тверджень випливає з властивості 2. Якщо у трикутнику ABC кут ABC прямий, то дуга AC, на яку спирається цей кут, є півколом. Тоді гіпотенуза AC – діаметр описаного кола, тобто її середина – центр кола. Твердження про довжину медіани випливає з рівності радіусів: $BO = AO = CO = \frac{1}{2} AC$.



Відзначимо ще один цікавий факт: медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить даний трикутник на два рівнобедрені трикутники зі спільною бічною стороною. Із цього, зокрема, випливає, що кути, на які медіана ділить прямий кут, дорівнюють гострим кутам трикутника.

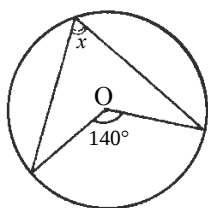


Це потрібно вміти!

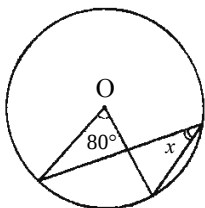
Задача. За даними рисунків знайдіть градусну міру x (точка O – центр кола).

Розв'язання

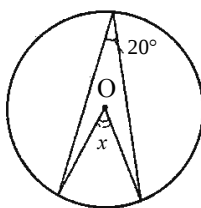
а) $x = \frac{1}{2} \cdot 140^\circ = 70^\circ$ (за теоремою про вписаний кут);



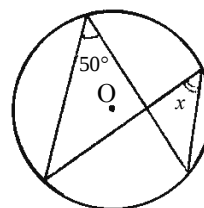
a



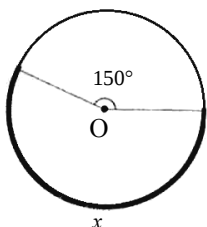
б



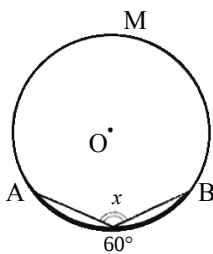
в



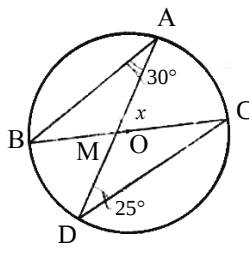
г



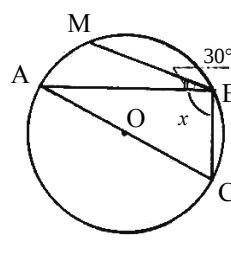
д



е



ж



з

б) $x = \frac{1}{2} \cdot 80^\circ = 40^\circ$ (за теоремою про вписаний кут);

в) $x = 20^\circ \cdot 2 = 40^\circ$ (за теоремою про вписаний кут);

г) $x = 50^\circ$ (бо за властивістю 1 вони рівні);

д) $x = 360^\circ - 150^\circ = 210^\circ$ (за теоремою про вписаний кут);

е) $x = \frac{1}{2} \cdot (360^\circ - 60^\circ) = 150^\circ$

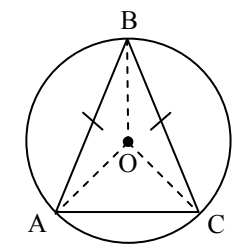
ж) $\angle ABC = \angle ADC = 25^\circ$, $\angle AMB = 180^\circ - (25^\circ + 30^\circ) = 125^\circ$, $\angle AMC = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$

з) $\angle ABC = 90^\circ$ (бо спирається на півколо)

$$\angle MBC = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

Задача. Сторона рівнобедреного трикутника, вписаного в коло, стягує дугу в 100° . Знайдіть кути трикутника. Скільки розв'язків має задача?

Розв'язання



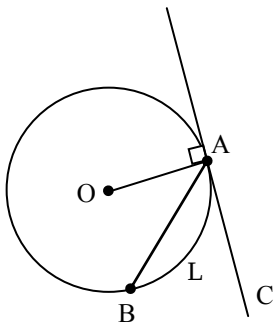
Нехай $\triangle ABC$ – даний рівнобедрений трикутник. Розглянемо 1 випадок коли сторона AC стягує дугу в 100° . Тоді $\angle AOC = 100^\circ \Rightarrow \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 100^\circ = 50^\circ$, в рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні $\angle BAC = \angle BCA = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 50^\circ) = 65^\circ$.

$$\angle BAC = \angle BCA = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 50^\circ) = 65^\circ.$$

Розглянемо 2 випадок, коли сторона AB стягує дугу в 100° . Тоді $\angle AOB = 100^\circ \Rightarrow \angle ACB = \frac{1}{2} \cdot 100^\circ = 50^\circ$, в рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні, тому $\angle ACB = \angle CAB = 50^\circ$, $\angle ABC = 180^\circ - (50^\circ + 50^\circ) = 80^\circ$.

$$= \angle CAB = 50^\circ, \angle ABC = 180^\circ - (50^\circ + 50^\circ) = 80^\circ.$$

Відповідь: $50^\circ, 65^\circ, 65^\circ; 50^\circ, 50^\circ, 80^\circ$.



Це потрібно знати!

Кут між дотичною і січною

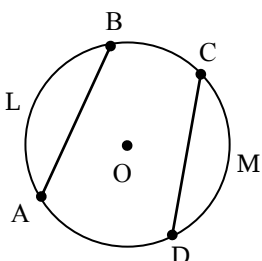
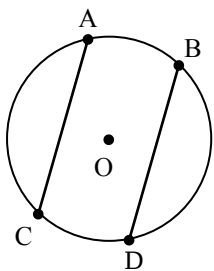
Твердження 1. Кут між січною і дотичною до кола, проведеною через кінець хорди, вимірюється половиною дуги, яка лежить усередині цього кута.

$$\angle BAC = \frac{1}{2} (\cup ALB)$$

Твердження 2. Дуги кола, які містяться між двома паралельними хордами, рівні.

$$AC \parallel BD \Rightarrow \cup AB = \cup CD$$

Твердження 3. Рівні хорди стягують дуги з однакою

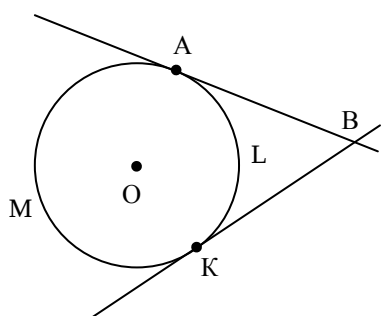


градусною мірою, і навпаки: дуги з однаковою градусною мірою стягують рівними хордами.

$$AB = CD \Rightarrow \cup ALB = \cup CMD$$

Твердження 4. Центр кола, описаного навколо гострокутного трикутника, лежить усередині трикутника, а центр кола, описаного навколо тупокутного трикутника, – поза трикутником.

Твердження 5. Кут із вершиною всередині кола вимірюється півсумою дуг, одна з яких міститься між сторонами цього кута, а інша – між їх продовженнями.



Твердження 6. Кут між двома січними, які перетинаються зовні кола, вимірюється піврізницею більшої і меншої дуг, які містяться між його сторонами.

$$\angle ABK = \frac{1}{2} (\cup AMK - \cup ALK)$$

Спробуй виконати сам!

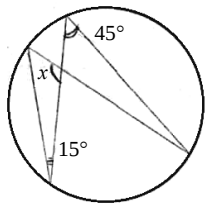
1. У колі побудовано центральний кут. Знайдіть градусні міри дуг, які утворилися, якщо:

- а) одна з них більша за іншу на 120° ;
- б) вони відносяться як 2:7.

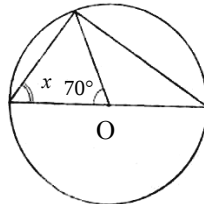
2. Трикутник ABC вписаний у коло, центр якого лежить на відрізку AB. Знайдіть:

- а) кут B, якщо $\angle A = 65^\circ$;
- б) медіану, проведену з вершини C, якщо $AB = 12$ см.

3. За даними рисунка знайдіть кут x (точка O – центр кола).



а



б

4. Знайдіть кути вписаного трикутника, якщо його вершини ділять коло на три дуги, градусні міри яких відносяться як 3 : 4 : 5.

5. Знайдіть менший катет прямокутного трикутника, якщо його медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює 9 см і утворює з гіпотенузою кут 60° .