

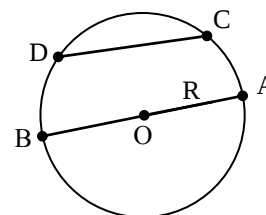
Заняття №2 Тема: Коло, хорди, дуги, дотичні й січні.

Це потрібно знати!

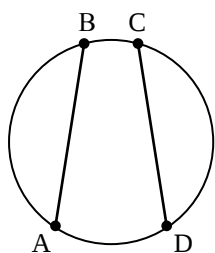
Коло – це фігура, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки (центра).

О – центр кола, ОА – радіус, АВ – діаметр, CD – хорда (відрізок, що сполучає дві точки кола).

Найбільшою хордою є діаметр.

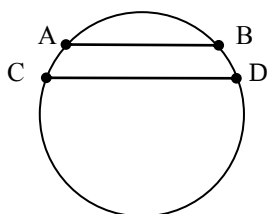


Властивості дуг і хорд



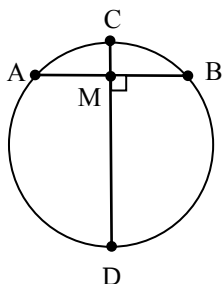
$$\cup AB = \cup CD \Leftrightarrow AB = CD$$

Рівні дуги стягують рівні хорди (і навпаки).



$$AB \parallel CD \Rightarrow \cup AC = \cup BD$$

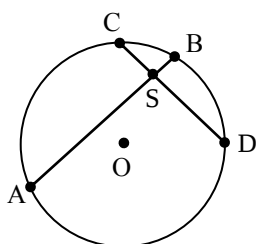
Паралельні хорди відтинають на колі рівні дуги.



$$CD \perp AB \Leftrightarrow AM = MB$$

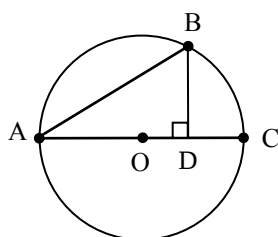
$$\cup AC = \cup CB$$

$$\cup AD = \cup DB$$



$$AS \cdot SB = CS \cdot SD$$

S – точка перетину хорд AB і CD.



Якщо AB – хорда, AC – діаметр і $BD \perp AC$, то

$$AB^2 = AC \cdot AD$$

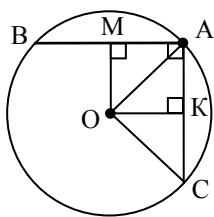
$$BD^2 = AD \cdot DC$$

Це потрібно вміти!

Задача. З однієї точки кола проведені дві взаємно перпендикулярні хорди, відділені

від центра на 9 см і 12 см. Знайдіть діаметр кола.

Розв'язання



Нехай $AB \perp AC$, $OM = 12$ см, $OK = 9$ см

$AMOK$ – прямокутник $\Rightarrow MA = OK = 9$ см

$OM = AK = 12$ см, $OA = OC$ – як радіус,

тому $\triangle AOC$ – рівнобедрений, OK – висота є медіаною $\Rightarrow$

$AK = KC = 12$ см. Розглянемо прямокутний $\triangle AKO$ ($\angle K = 90^\circ$)

За теоремою Піфагора: $AO^2 = AK^2 + OK^2$

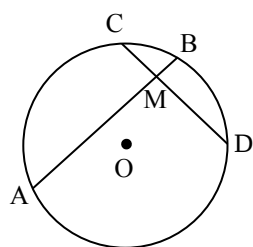
$$AO^2 = 12^2 + 9^2, \quad AO^2 = 144 + 81 = 225 \Rightarrow AO = \sqrt{225} = 15 \text{ (см)}$$

Тому $R = 15$ см, а $D = 15 \cdot 2 = 30$ (см)

Відповідь: 30 см.

Задача. У результаті перетину двох хорд одна з них ділиться на відрізки завдовжки 6 см і 16 см, а друга – у відношенні 3:2. Знайдіть довжину другої хорди.

Розв'язання



Нехай хорди AB і AD перетинаються в т. M , тоді за властивістю хорд:

$$AM \cdot MB = CM \cdot DM$$

За умовою задачі $AM = 6$ см; $BM = 16$ см. Нехай коефіцієнт пропорційності x см, тоді $CM = 2x$ см, $DM = 3x$ см.

$$6 \cdot 16 = 2x \cdot 3x$$

$$96 = 6x^2$$

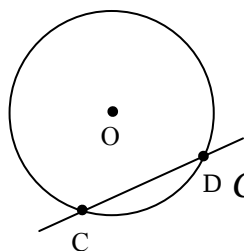
$$x^2 = 16$$

$$x = 4, \text{ отже } CM = 2 \cdot 4 = 8 \text{ см; } DM = 3 \cdot 4 = 12 \text{ см.}$$

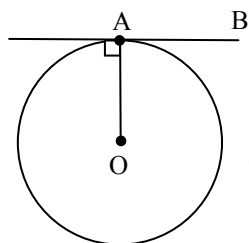
$$CD = CM + MD, \quad CD = 8 + 12 = 20 \text{ см} \quad \text{Відповідь: 20 см.}$$

Це потрібно знати!

Властивості дотичних і січних

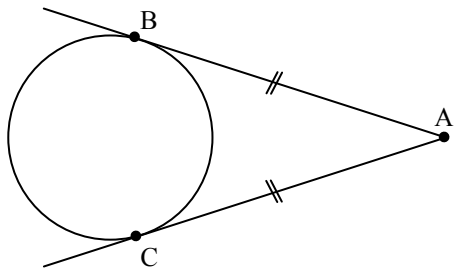


CD – **січна** – пряма, що має з колом дві спільні точки



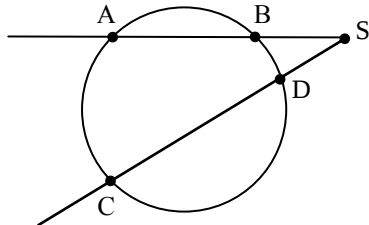
$OA \perp AB$, AB – **дотична** – пряма, що має з колом лише одну спільну

точки; *A* – точка дотику



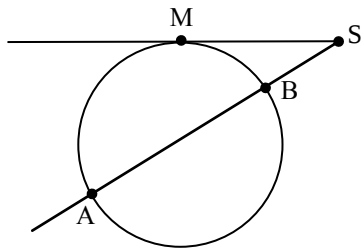
$$OB = AC$$

AB і *AC* – дотичні



$$SA \cdot SB = SC \cdot SD$$

SA і *SC* – січні



$$SA \cdot SB = SM^2$$

SM – дотична; *M* – точка дотику;

SA – січна

Це потрібно вміти!

Задача. Пряма *AB* дотинається до кола з центром в точці *O*, *B* – точка дотику, *AD* – січна. *AB* = 12 см, *DC* = 7 см. Знайдіть *AD*.

Розв'язання

За властивістю дотичних і січних маємо:

$$AB^2 = AD \cdot AC. \text{ Нехай } AC = x \text{ см, тоді}$$

$$AD = (x + 7) \text{ см}$$

$$12^2 = (x + 7)x$$

$$144 = x^2 + 7x$$

$$x^2 + 7x - 144 = 0$$

$$x_1 = 9; x_2 = -16 \text{ – не задовольняє умові задачі.}$$

Отже *AC* = 9 см, *AD* = 9 + 7 = 16 см.

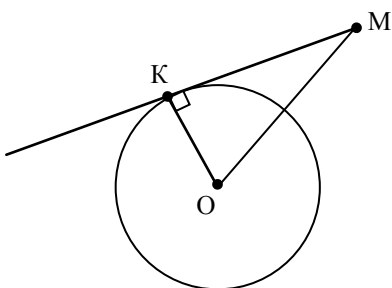
Відповідь: 16 см.

Задача. З точки поза колом, віддаленої від центра кола на 39 см, проведено дотичну до кола. Знайдіть радіус кола, якщо відрізок дотичної дорівнює 36 см.

Розв'язання

За умовою задачі *OM* = 39 см, *KM* = 36 см.

Проведено радіус *OK*. За властивістю радіуса, проведеного у



точку дотику $\angle OKM = 90^\circ$, тому $\triangle OKM$ – прямокутний. За теоремою Піфагора: $MO^2 = KM^2 + OK^2$

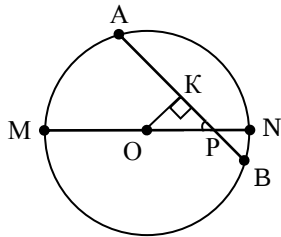
$$39^2 = 36^2 + OK^2$$

$$1521 = 1296 + OK^2$$

$$OK^2 = 1521 - 1296 = 225, \text{ тому } OK = \sqrt{225} = 15 \text{ (см)} \quad \text{Відповідь: 15 см.}$$

Задача. Через точку Р діаметра даного кола проведено хорду АВ, що утворює з діаметром кут 60° . Обчисліть радіус кола, якщо $AP = a$ і $BP = b$.

Розв'язання



Нехай MN – діаметр даного кола, що проходить через точку Р, $\angle APO = 60^\circ$. Опустимо перпендикуляр ОК на хорду АВ. Тоді ОК – бісектриса $\triangle AOB$ (так як $\triangle AOB$ – рівнобедрений, $OA = OB = R$). Отже $BK = \frac{1}{2}$; $AB = \frac{a+b}{2}$.

$$PK = BK - BP = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a+b-2b}{2} = \frac{a-b}{2}.$$

Розглянемо прямокутний трикутник ОКР.

$$\text{У ньому } \angle KOP = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ. \text{ Отже, } OP = 2 \cdot PK = 2 \cdot \frac{a-b}{2} = a-b.$$

$$MP = MO + OP = R + a - b$$

$PN = ON - OP = R - (a - b)$, де R – радіус даного кола. Оскільки хорди АВ і MN перетинаються в точці Р, то $MP \cdot PN = AP \cdot PB$.

$$(R + a - b) \cdot (R - (a - b)) = ab$$

$$R^2 - (a - b)^2 = ab$$

$$R^2 = ab + a^2 - 2ab + b^2$$

$$R^2 = a^2 - ab + b^2 \Rightarrow R = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$$

$$\text{Відповідь: } \sqrt{a^2 - ab + b^2}$$

Спробуй виконати сам!

1. У результаті перетину хорди з діаметром кола хорда ділиться на відрізки завдовжки 3 см і 4 см, а діаметр – у відношенні 1:3. Знайдіть радіус кола.

(Відп.: 4 см)

2. Січна, проведена з точки А, перетинає коло в точках В і С, причому $AB = 4$ см, $BC = 5$ см. Знайдіть довжину відрізка дотичної, проведеної до кола з точки А.

(Відп.: 6 см)

3. Із точки поза колом проведено січну дотичну. Різниця внутрішньої і зовнішньої частин січної дорівнює 2 см, а дотична становить 12 см. Обчисліть довжину січної.

(Відп.: 18 см)

4. Хорда, довжина якої 24 см, перпендикулярна до діаметра, довжина якого дорівнює 25 см. Обчисліть відстань від одного кінця хорди до кінців діаметра.

(Відп.: 15 см; 20 см)