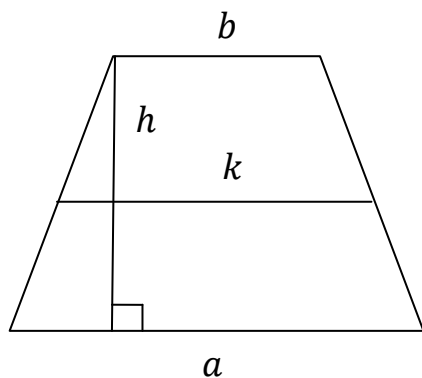


Заняття 6 Тема: Площа трапеції

Це потрібно знати!

Площа трапеції



$$S = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

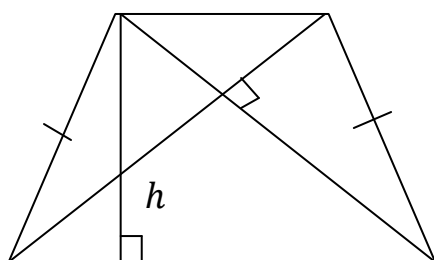
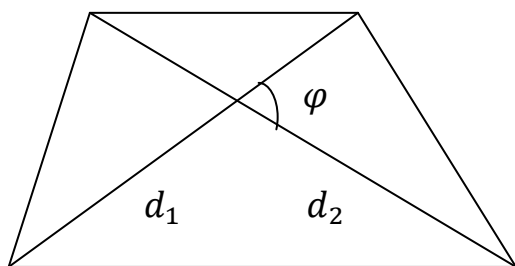
$$S = k \cdot h,$$

де a і b —основи трапеції,

h —висота,

k —середня лінія

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$



Площа рівнобічної трапеції, діагоналі якої перпендикулярні, дорівнює квадрату її висоти

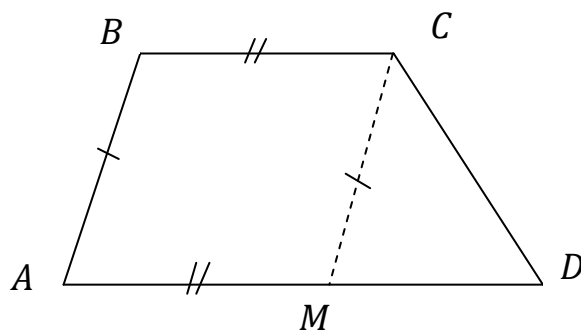
$$S = h^2$$

Типові додаткові побудови для трапеції

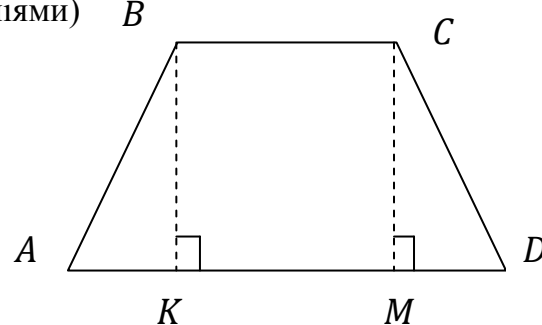
(зображені штриховими лініями) B

$$BK \perp AD$$

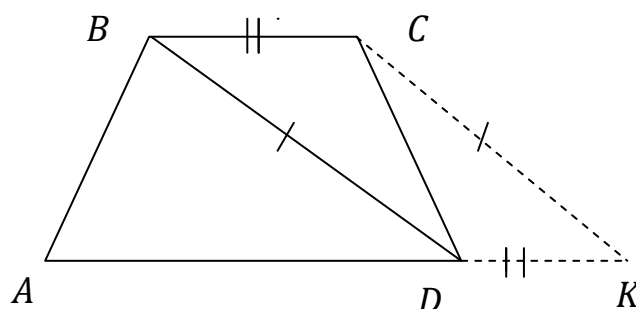
$$CM \perp AD$$

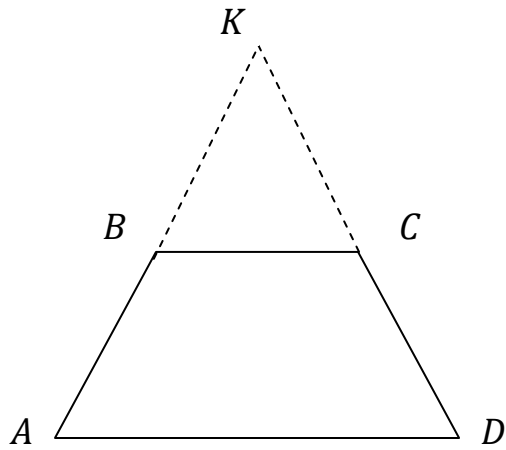


$$CK \parallel BD$$



$$CM \parallel AB$$



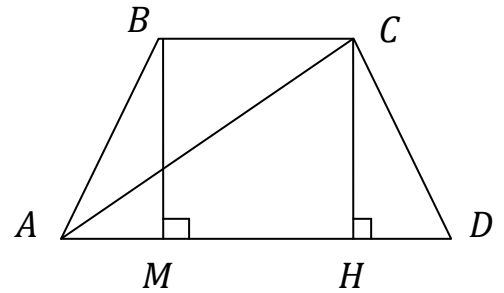


Це потрібно вміти!

Задача 1. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 12 см і 18 см, а діагональ є бісектрисою її гострого кута. Обчисліть площу цієї трапеції.

Розв'язання

Нехай $ABCD$ — дана трапеція, в якій $BC \parallel AD$, $AB = CD$, $\angle BAC = \angle CAD$; $\angle BCA = \angle CAD$ як внутрішні різносторонні при $BC \parallel AD$ і січній AC , звідси, $\angle BAC = \angle BCA$. Отже, $\triangle ABC$ — рівнобедрений, $AB = BC = 12$ см. Проведемо $CH \perp AD$ і $BM \perp AD$. Так як трапеція рівнобічна, то $AM = HD$.



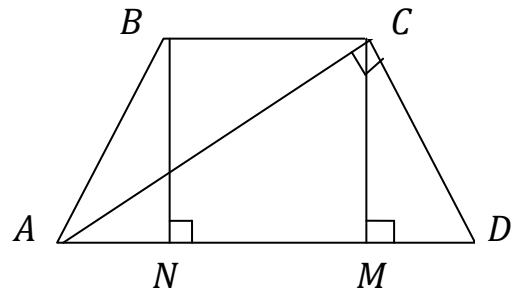
$$HD = \frac{AD - BC}{2} = \frac{18 - 12}{2} = 3(\text{см}). \text{ З } \triangle CHD (\angle H = 90^\circ):$$

$$CH = \sqrt{CD^2 - HD^2} = \sqrt{144 - 9} = \sqrt{135} = 3\sqrt{15}(\text{см}).$$

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot CH = \frac{12 + 18}{2} \cdot 3\sqrt{15} = 45\sqrt{15}(\text{см}^2).$$

Відповідь: $45\sqrt{15}\text{см}^2$.

Задача 2. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, основи якої 5 см і 13 см, а діагоналі перпендикулярні до бічних сторін.



Розв'язання

Нехай $ABCD$ — дана трапеція, в якій $BC \parallel AD$, $AB = CD$, $BC = 5$ см,

$AD = 13$ см, $AC \perp CD$. Проведемо $CM \perp AD$ і $BN \perp AD$. Так як $AB = CD$, то $AN = MD = \frac{AD - BC}{2} = \frac{13 - 5}{2} = 4(\text{см})$. $AM = AD - MD = 13 - 4 = 9(\text{см})$.

$$\text{З } \triangle ACD (\angle C = 90^\circ): CM = \sqrt{AM \cdot MD} = \sqrt{4 \cdot 9} = 6(\text{см}).$$

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CM; S_{ABCD} = \frac{13 + 5}{2} \cdot 6 = 54(\text{см}^2). \text{ Відповідь: } 54\text{см}^2.$$

Задача 3. Знайдіть площу трапеції, основи якої дорівнюють 16 см і 30 см, а бічні сторони — 13 см і 15 см.

Розв'язання

Нехай $ABCD$ - дана трапеція, $BC \parallel AD$, $BC = 16\text{ см}$,
 $AD = 30\text{ см}$, $AB = 13\text{ см}$, $CD = 15\text{ см}$.

Проведемо $CM \parallel AB$. Отримаємо паралелограм $ABCM$,

$$AM = BC, AB = MC,$$

$$MD = AD - BC = 30 - 16 = 14(\text{см}).$$

Знайдемо висоту CE - висоту $\triangle MCD$ і висоту трапеції $ABCD$.

$$CE = \frac{2S_{\triangle MCD}}{MD}.$$

За формулою Герона

$$S_{\triangle MCD} = \sqrt{p(p - MD)(p - CD)(p - MC)}$$

$$p = \frac{MD + MC + CD}{2} = \frac{14 + 13 + 15}{2} = 21(\text{см})$$

$$S_{\triangle MCD} = \sqrt{21(21 - 14)(21 - 15)(21 - 13)} = 84 (\text{см}^2).$$

$$CE = \frac{2 \cdot 84}{14} = 12(\text{см}).$$

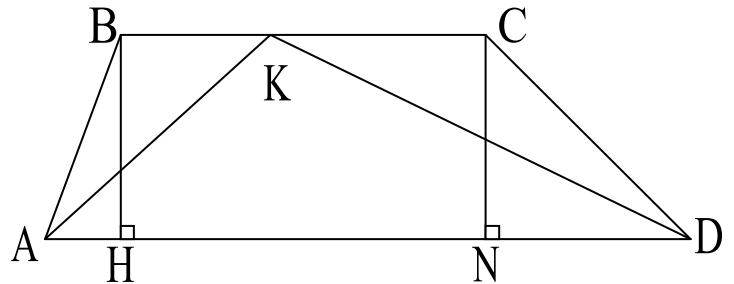
$$\text{Отже, } S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot CE = \frac{16 + 30}{2} \cdot 12 = 276(\text{см}^2).$$

Відповідь: 276 см^2 .

Задача 4. Точка перетину бісектрис гострих кутів при основі трапеції належить іншій основі.

Знайдіть площу трапеції, якщо її бічні сторони дорівнюють 17 см і 25 см , а висота – 15 см .

Розв'язання



$ABCD$ – дана трапеція, $BC \parallel AD$. $\angle BAK = \angle KAD$, $\angle BKA =$

$\angle KAD$ як внутрішні різносторонні, тоді $\angle BAK = \angle BKA$, $AB = BK = 17\text{ см}$.

Аналогічно, $\angle CKD = \angle CDK$, $CK = CD = 25\text{ см}$, $BC = BK + KC = 17 + 25 = 42(\text{см})$.

Проведемо $BH \perp AD$. З $\triangle ABH$ ($\angle H = 90^\circ$)

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{64} = 8(\text{см}).$$

Проведемо $CN \perp AD$. З $\triangle CND$ ($\angle N = 90^\circ$) $ND = \sqrt{CD^2 - CN^2} = 20(\text{см})$

$$AD = 20 + 8 + 42 = 70(\text{см}).$$

$$\text{Отже, } S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot CN = \frac{42 + 70}{2} \cdot 15 = 840(\text{см}^2).$$

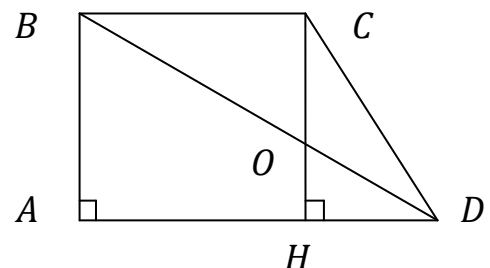
Відповідь: 840 см^2 .

Задача 5. Більша діагональ прямокутної трапеції ділить

висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки

15 см і 9 см , а бічна сторона дорівнює її меншій основі.

Знайдіть площу трапеції.



Розв'язання

Нехай $ABCD$ — дана трапеція, в якій $BC \parallel AD, BC = CD$. Проведемо

$CH \perp AD; BD \cap CH = O$. $\triangle BOC \sim \triangle DOH$ за двома кутами, так як

$\angle BCO = \angle DHO = 90^\circ, \angle BOC = \angle DOH$ як вертикальні. Тоді $\frac{CO}{OH} = \frac{BC}{HD} = \frac{CD}{HD}$. Так як $CD >$

HD , то $CO > OH, CO = 15 \text{ см}, OH = 9 \text{ см},$

$CH = 15 + 9 = 24 \text{ (см)}$. $\frac{CO}{OH} = \frac{CD}{HD} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}; CD = \frac{5}{3}HD$.

З $\triangle CHD (\angle H = 90^\circ): CH^2 = CD^2 - HD^2; 24^2 = \frac{25}{9}HD^2 - HD^2;$

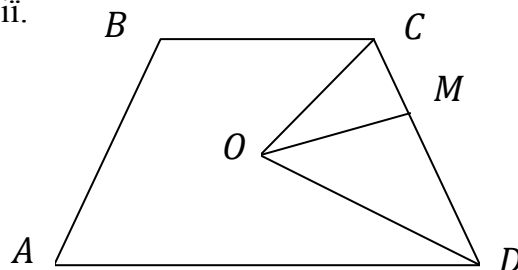
$24^2 = \frac{16}{9}HD^2; HD^2 = 324; HD = 18 \text{ см}; CD = BC = 30 \text{ см},$

$AD = BC + HD = 30 + 18 = 48 \text{ (см)}$.

$S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2} \cdot AB = \frac{30+48}{2} \cdot 24 = 936 \text{ (см}^2\text{)}$.

Відповідь: 936 см^2 .

Задача 6. Коло, вписане в рівнобічну трапецію, ділить точкою дотику бічну сторону на відрізки завдовжки 8 см і 18 см. Знайдіть площу трапеції.



Розв'язання

Нехай $ABCD$ — дана трапеція, в якій $BC \parallel AD, AB = CD, O$ — центр вписаного кола. Проведемо $OM \perp CD, OM$ — радіус вписаного кола.

$CM = 8 \text{ см}, MD = 18 \text{ см}. \angle COD =$

90° як кут між бісектрисами внутрішніх односторонніх кутів при $BC \parallel AD$ і січній CD .

З $\triangle COD (\angle O = 90^\circ): OM = \sqrt{CM \cdot MD} = \sqrt{8 \cdot 18} = \sqrt{144} = 12 \text{ (см)}$.

Так як в трапецію вписане коло, то $AB + CD = AD + BC$.

$AD + BC = 2CD; CD = \frac{AD+BC}{2}; CD = CM + MD = 8 + 18 = 26 \text{ (см)}$.

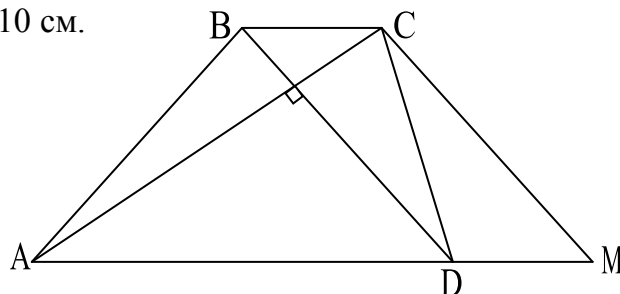
$S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2} \cdot h$, де $h = 2OM$.

$S_{ABCD} = CD \cdot 2OM =$

$26 \cdot 24 = 624 \text{ (см}^2\text{)}$.

Відповідь: 624 см^2 .

Задача 7. У трапеції $ABCD$ діагоналі AC і BD перпендикулярні. Знайдіть площу цієї трапеції, якщо $AC = 12 \text{ см}$, а середня лінія трапеції дорівнює 10 см.



Розв'язання

Нехай $ABCD$ — дана трапеція, в якій $BC \parallel AD, AC$ і BD — діагоналі, $AC \perp BD, AC = 12 \text{ см}$, а середня лінія 10 см. Проведемо $CM \parallel BD$, отже $CM \perp AC, \angle ACM = 90^\circ$. З іншого боку, $DBCM$ — паралелограм, звідки $DM = BC, CM = BD$.

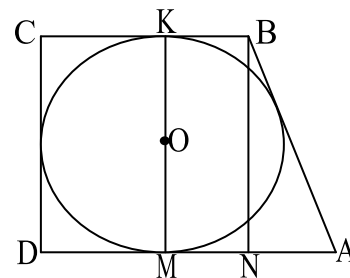
$AM = AD + DM = AD + BC = 2 \cdot 10 = 20(\text{см})$. З $\triangle ACM$ ($\angle C = 90^\circ$):

$CM = \sqrt{AM^2 - AC^2} = \sqrt{400 - 144} = \sqrt{256} = 16(\text{см})$. $\triangle ACM$ і трапеція $ABCD$ – рівновеликі.

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle DCM} = S_{\triangle ACM}.$$

Отже, площа трапеції $S_{ABCD} = S_{\triangle ACM} = \frac{AC \cdot CM}{2} = \frac{12 \cdot 16}{2} = 96(\text{см}^2)$. Відповідь: 96 см^2 .

Задача 8. Довжина кола, вписаного у прямокутну трапецію, дорівнює 24π см. Обчислити площу трапеції, якщо нижня основа її на 10 см довша від верхньої основи.



Розв'язання

Нехай $ABCD$ – дана трапеція і AB і CD – бічні сторони ($AB > CD$), а AD і BC – основи трапеції. З умови маємо: $CD \perp AD$ і $AD - BC = 10 \text{ см}$. В трапецію вписано коло, довжина якого 24π см. $24\pi = \pi d$, де d – діаметр кола. Звідси $d = 24 \text{ см}$. Нехай KM – діаметр кола і KM перпендикулярний до основ трапеції. З вершини B проведемо на основу AD перпендикуляр BN . $BN = KM = CD = 24 \text{ см}$. $CB = DN$, $AD - DN = 10 \text{ см}$, $AN = 10 \text{ см}$.

З $\triangle ABN$ ($\angle N = 90^\circ$) $AB = \sqrt{BN^2 + NA^2} = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26(\text{см})$.

З того, що чотирикутник $ABCD$ – описаний навколо кола, маємо:

$$AB + CD = CB + DA; CB + DA = 26 + 24 = 50(\text{см}).$$

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot KM = \frac{50}{2} \cdot 24 = 600(\text{см}^2).$$

Відповідь: 600 см^2 .

Спробуй сам!

1. Знайдіть площу трапеції, основи якої 16 м і 44 м, а бічні сторони – 17 м і 25 м.

Відповідь: 450 м^2 .

2. В рівнобічній трапеції більша основа 44 м, а бічна сторона 17 м і діагональ 39 м. Знайдіть площу трапеції. Відповідь: 540 м^2 .

3. В рівнобічній трапеції діагональ дорівнює 16 м і утворює з більшою основою кут 60° . Знайдіть площу трапеції.

Відповідь: $64\sqrt{3} \text{ м}^2$.

4. Коло, вписане в прямокутну трапецію, ділить точкою дотику більшу бічну сторону на відрізки завдовжки 4 см і 5 см. Знайдіть площу трапеції.

Відповідь: 490 см^2 .

5. Основи прямокутної трапеції дорівнюють 9 см і 5 см, а діагональ ділить її гострий кут навпіл. Знайдіть площу трапеції.

Відповідь: 21 см^2 .

6. Основи трапеції дорівнюють 2 см і 18 см, а діагоналі – 15 см і 7 см. Знайдіть площу трапеції. Відповідь: 42 см^2 .

7. Точка перетину бісектрис гострих кутів при основі трапеції належить другій основі. Знайдіть площу трапеції, якщо її бічні сторони 10 см і 17 см, а висота – 8 см.

Відповідь: 300 см^2 .

8. Діагональ рівнобічної трапеції ділить її тупий кут навпіл. Менша основа трапеції дорівнює 8 м, а периметр дорівнює 44 м. Знайдіть площу трапеції.

Відповідь: $20\sqrt{35} \text{ м}^2$.