

Заняття 5 Тема: Площа чотирикутників

Це потрібно знати!

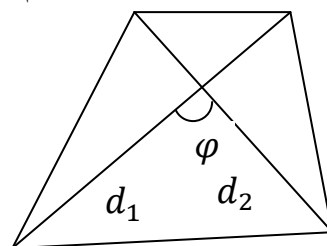
Площа – це поняття, яке дає можливість зрозуміти, яку частину площини займає той чи інший об'єкт. Площею многокутника називається величина внутрішньої області многокутника. Безпосереднє вимірювання площі на практиці викликає труднощі, тому використовують формули для обчислення площ.

Властивості площі

1. Рівні многокутники мають рівні площі.
 2. Площа многокутника дорівнює сумі площ частин, з яких він складається.
 3. Площа квадрата зі стороною, що дорівнює одиниці довжини, дорівнює одиниці площі.
- Дві фігури називаються рівновеликими, якщо вони мають рівні площі.

Площа довільного чотирикутника

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$



Площа описаного та вписаного чотирикутника

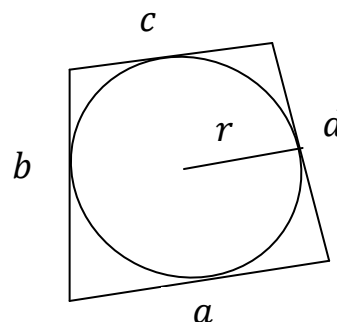
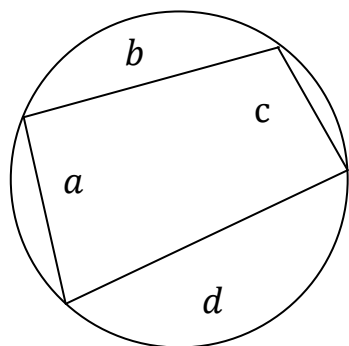
$$S = p \cdot r,$$

де r – радіус вписаного кола

$$p = \frac{a + b + c + d}{2}$$

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

де $p = \frac{a+b+c+d}{2}$

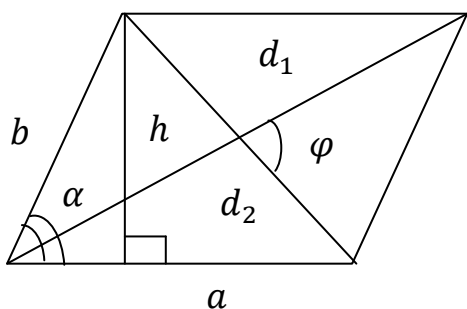


Площа паралелограма

$$S = a \cdot h$$

$$S = ab \sin \alpha$$

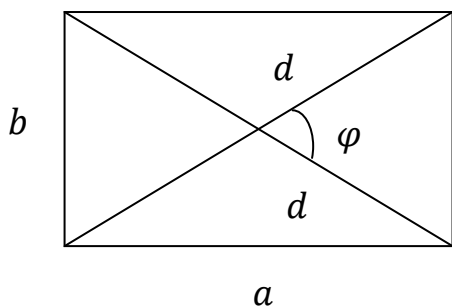
$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$



Площа прямокутника

$$S = ab$$

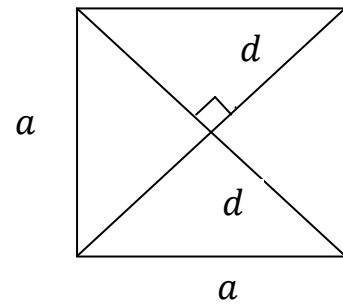
$$S = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi$$



Площа квадрата

$$s = a^2$$

$$s = \frac{1}{2}d^2$$

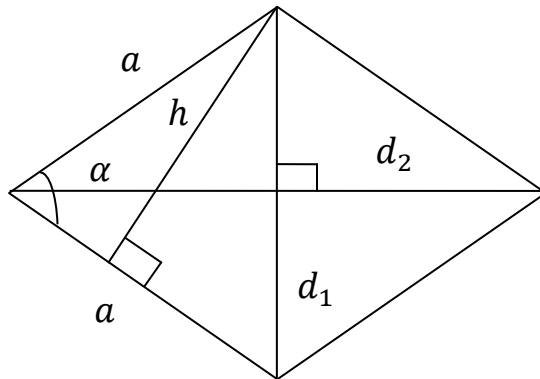


$$s = ah$$

$$s = a^2 \sin \alpha$$

$$s = \frac{1}{2}d_1d_2$$

Площа ромба



Це потрібно вміти!

Задача 1. Бісектриса кута прямокутника поділяє сторону на відрізки 7 см і 9 см, починаючи з вершини протилежного кута. Обчисліть площу прямокутника.

Розв'язання

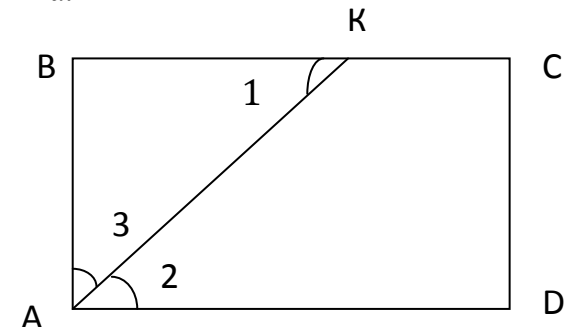
Нехай $ABCD$ — даний прямокутник, в якому AK — бісектриса $\angle BAD$; $BC \parallel AD$; AK — січна, тому $\angle 1 = \angle 2$, як внутрішні різносторонні. AK — бісектриса $\angle BAD$,

тому $\angle 2 = \angle 3$, отже $\angle 1 = \angle 3$. У $\triangle ABK$: $\angle 1 = \angle 3$, отже, $\triangle ABK$ — рівнобедрений з основою AK і тому $AB = BK$. Якщо $BK = 9$ см, а $KC = 7$ см за умовою, то $BC = 9 + 7 = 16$ (см).

$$S_{ABCD} = AB \cdot BC = 9 \cdot 16 = 144(\text{см}^2).$$

Відповідь: 144см^2 .

Задача 2. Знайдіть площу прямокутника, діагональ якого 10 см і утворює зі стороною кут 75° .



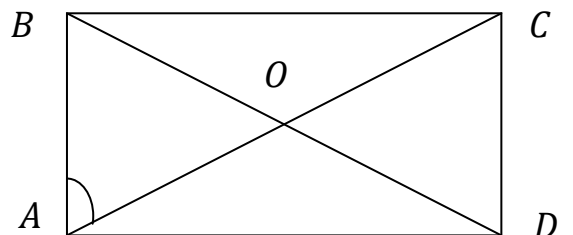
Розв'язання

Нехай $ABCD$ — даний прямокутник, в якому діагональ AC утворює зі стороною AB $\angle BAC = 75^\circ$ і $AC = 10$ см. $AC = BD$ за властивістю діагоналей прямокутника, отже $AO = BO$.

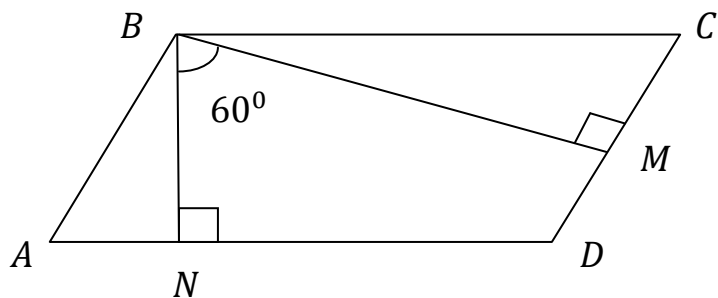
$\triangle ABO$ — рівнобедрений, отже, $\angle OAB = \angle OBA = 75^\circ$, а $\angle AOB = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC^2 \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot \frac{1}{2} = 25(\text{см}^2).$$

Відповідь: 25см^2 .



Задача 3. Висоти паралелограма 18 см і 24 см, а кут між ними 60° . Знайти площу паралелограма.



Розв'язання

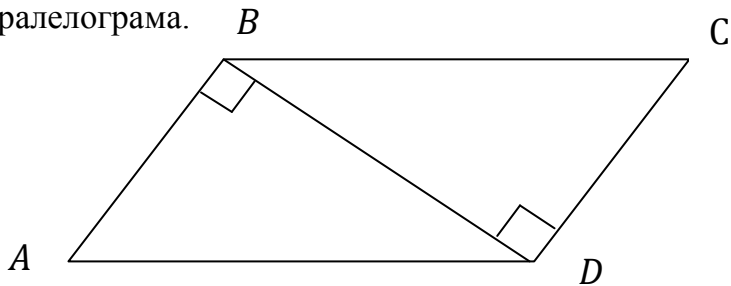
Нехай $ABCD$ – даний паралелограм, в якому $BN \perp AD$ і $BM \perp CD$, $BN = 18$ см, $BM = 24$ см, $\angle NBM = 60^\circ$. $NBMD$ – чотирикутник, в якому $\angle BMD + \angle BND = 180^\circ$, тоді $\angle NBM + \angle MDN = 180^\circ$.

$\angle NBM = 60^\circ$ за умовою, отже $\angle MDN = 120^\circ$. Тоді

$\angle C = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. З $\triangle BMC$: $BC = \frac{MB}{\sin 60^\circ} = \frac{24 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{48\sqrt{3}}{3} = 16\sqrt{3}$ (см). $BC = AD$, тоді $S_{ABCD} = AD \cdot BN$; $S_{ABCD} = 16\sqrt{3} \cdot 18 = 288\sqrt{3}$ (см²).

Відповідь: $288\sqrt{3}$ см².

Задача 4. В паралелограмі діагоналі дорівнюють 16 см і 20 см. Менша з них перпендикулярна до його сторони. Знайдіть площу цього паралелограма.



Розв'язання

Нехай $ABCD$ – даний паралелограм, в якому $BD \perp AB$ і $BD \perp CD$. Нехай $AB = x$ см, $BC = y$ см, тоді $2(x^2 + y^2) = 16^2 + 20^2$;

звідси $x^2 + y^2 = \frac{256+400}{2}$; $x^2 + y^2 = 328$. Отже, з $\triangle BDC$ ($\angle D = 90^\circ$) за теоремою Піфагора $CD^2 + BD^2 = BC^2$, тобто $x^2 + 16^2 = y^2$; $y^2 - x^2 = 16^2$.

Складаємо систему рівнянь:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 328, \\ y^2 - x^2 = 256. \end{cases}$$

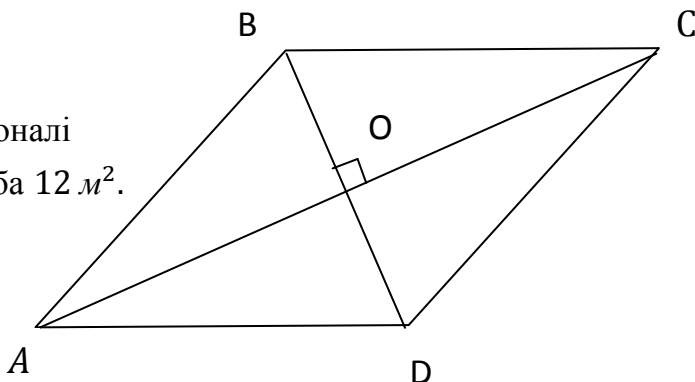
$$x^2 + y^2 - (y^2 - x^2) = 328 - 256;$$

$$2x^2 = 72; x^2 = 36, x = 6 (x > 0).$$

$$S_{ABCD} = AB \cdot BD = 6 \cdot 16 = 96 (\text{см}^2).$$

Відповідь: 96 см^2 .

Задача 5. Знайдіть сторону ромба, діагоналі якого відносяться як 1: 2, а площа ромба 12 м^2 .



Розв'язання

Нехай $ABCD$ – даний ромб, в якому $BD:AC = 1:2$, а $S_{ABCD} = 12\text{м}^2$. Нехай $BD = x\text{ м}$, а $AC = y\text{ м}$, тоді за умовою задачі $y = 2x$, а $S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{xy}{2}$. Складаємо систему рівнянь: $\begin{cases} y = 2x \\ \frac{xy}{2} = 12; \end{cases}$

$$\begin{cases} y = 2x \\ 2x^2 = 24; \end{cases} \begin{cases} y = 2x \\ x^2 = 12; \end{cases} \begin{cases} y = 2x \\ x = \sqrt{12}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4\sqrt{3} \\ x = 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

$AC \perp BD$ за властивістю діагоналей ромба, отже з $\triangle AOB$: $AB^2 = AO^2 + BO^2$;

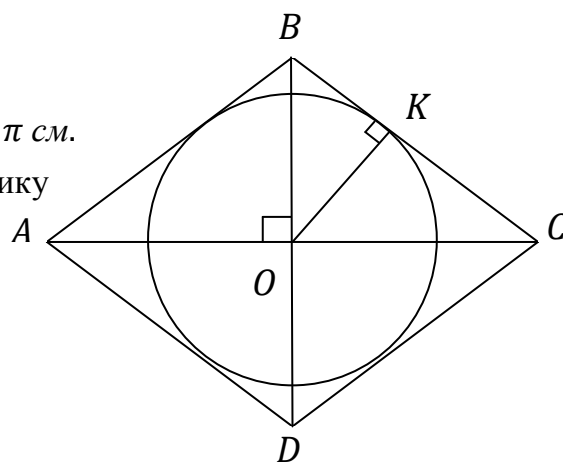
$$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}(\text{см}), BO = \frac{1}{2}BD = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}(\text{см}).$$

$$\text{З } \triangle ABO: AB = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{15}(\text{см}).$$

Відповідь: $\sqrt{15}\text{ см}$.

Задача 6. Довжина кола, вписаного в ромб, дорівнює $72\pi\text{ см}$.

Обчислити площу ромба, якщо його сторона точкою дотику поділяється у відношенні $4:9$.



Розв'язання

Нехай $ABCD$ – даний ромб, в який вписане коло, довжина якого $72\pi\text{ см}$, $BK:KC = 4:9$ за умовою. OK – радіус вписаного кола, отже висота ромба $h = 2OK$.

$$C = 2\pi r, \text{ де } r = OK, 2\pi r = 72\pi, r = 36(\text{см}), h = 2 \cdot 36 = 72(\text{см}).$$

$\triangle BOC$ – прямокутний, бо $AC \perp BD$, OK – висота проведена до гіпотенузи, отже, $OK^2 = BK \cdot KC$. Нехай $BK = 4x\text{ см}$, тоді $KC = 9x\text{ см}$,

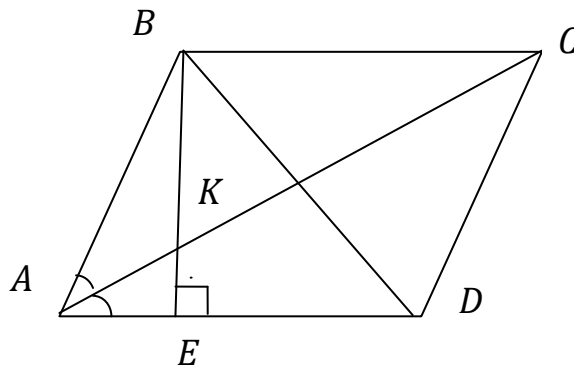
$$36^2 = 4x \cdot 9x; 36^2 = 36x^2; x^2 = 36; x = 6 (x > 0).$$

$$\text{Отже, } BC = 6 \cdot 13 = 78(\text{см}). \text{ Звідси } S_{ABCD} = BC \cdot h = 78 \cdot 72 = 5616(\text{см})^2.$$

Відповідь: 5616см^2 .

Задача 7. Діагональ ромба ділить його висоту на відрізки 13 см і 5 см . Знайдіть площу ромба.

Розв'язання



Нехай $ABCD$ – даний ромб, в якому $BE \perp AD$, а діагональ AC ділить висоту на відрізки $BK = 13\text{ см}$, $KE = 5\text{ см}$. В ромбі $ABCD$ діагональ AC – бісектриса $\angle A$, отже AK – бісектриса $\angle A$ $\triangle ABE$.

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BK}{KE} \text{ за властивістю бісектриси трикутника. } \frac{BK}{KE} = \frac{AB}{AE} = \frac{13}{5}.$$

Нехай $AB = 13x$ см, $AE = 5x$ см, тоді з $\triangle ABE$: $AB^2 = BE^2 + AE^2$ за теоремою Піфагора.

$$(13x)^2 = (5x)^2 + 18^2;$$

$$169x^2 - 25x^2 = 324;$$

$$144x^2 = 324;$$

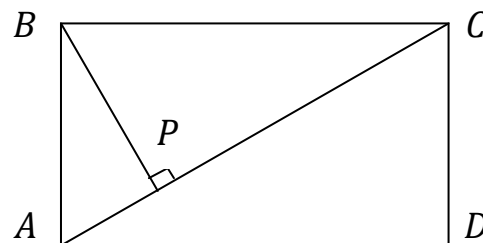
$$x^2 = \frac{324}{144}; x = \frac{18}{12} = 1,5 (x > 0).$$

$$\text{Отже, } AB = 13 \cdot 1,5 = 19,5 \text{ (см).}$$

Так як $AB = AD$, то $S_{ABCD} = AD \cdot BE = 19,5 \cdot 18 = 351 \text{ (см}^2\text{)}$.

Відповідь: 351 см^2 .

Задача 8. З вершини кута прямокутника до діагоналі проведено перпендикуляр, що ділить її на відрізки, різниця яких 6 см. Обчисліть площу прямокутника, якщо довжина перпендикуляра 4 см.



Розв'язання

Нехай $ABCD$ — даний прямокутник, в якому $BP \perp AC$, $BC > AB$,

отже $PC > AP$; $PC - AP = 6$ (см). Нехай $AP = x$ см, тоді $PC = (x + 6)$ см,

$AC = (2x + 6)$ см. В $\triangle ABC$: BP — висота, проведена до гіпотенузи, отже $BP^2 = AP \cdot PC$, $4^2 = x(x + 6)$; $16 = x^2 + 6x$;

$$x^2 + 6x - 16 = 0; x_1 = -8, x_2 = 2.$$

Так як $x > 0$, то $AP = 2$ см,

$PC = 8$ см, $AC = 10$ см. $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABC} = AC \cdot BP = 4 \cdot 10 = 40 \text{ (см}^2\text{)}$.

Відповідь: 40 см^2 .

Спробуй виконати сам!

1. Бісектриса кута прямокутника поділяє сторону на відрізки 12 см і 8 см, починаючи з вершини протилежного кута. Знайдіть площу прямокутника. Відповідь: 160 см^2 .

2. Як зміниться площа квадрата і його периметр, якщо діагональ зменшити в два рази?

Відповідь: площа зменшиться в 4 рази, а периметр в 2 рази.

3. Бісектриса кута прямокутника ділить його діагональ у відношенні 2 : 7. Знайдіть площу прямокутника, якщо його периметр 108 см.

Відповідь: 504 м^2 .

4. Знайдіть площу паралелограма, в якому дві висоти 5 м і 6 м, а кут між ними 30° .

Відповідь: 60 м^2 .

5. У паралелограмі гострий кут дорівнює 60° , а діагональ ділить тупий кут у відношенні 3 : 1.

Обчисліть площу паралелограма, якщо менша діагональ дорівнює $4\sqrt{3}$ см.

Відповідь: 32 см^2 .

6. Знайдіть площу ромба, якщо його висота 12 см, а менша діагональ 13 см. Відповідь: $202,8 \text{ см}^2$.

7. Точка дотику кола, вписаного в ромб, поділяє його сторону на відрізки, відношення довжин яких дорівнює 4. Знайдіть площу ромба, якщо довжина кола 8π см.

Відповідь: 40 см^2 .

8. Знайдіть площу паралелограма, сторони якого 2 см і $2\sqrt{2}$ см, а кут між висотами 45° .

Відповідь: 4 см^2 .