

Заняття 4. Тема. Вписані та описані чотирикутники

Це потрібно знати!

- Якщо всі вершини чотирикутника лежать на колі, то такий чотирикутник називається **вписаним у коло** (коло описане навколо чотирикутника).

Якщо чотирикутник $ABCD$ – вписаний у коло (див. рисунок), то $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$, і навпаки: якщо у чотирикутнику сума протилежних кутів дорівнює 180° , то навколо нього можна описати коло (цей чотирикутник можна вписати в коло) – **властивість та ознака**

вписаного чотирикутника.

Наслідки

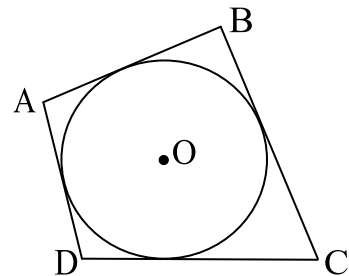
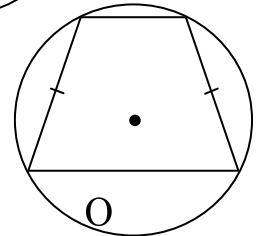
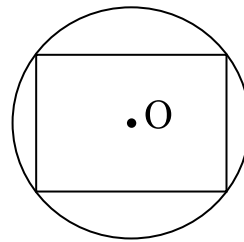
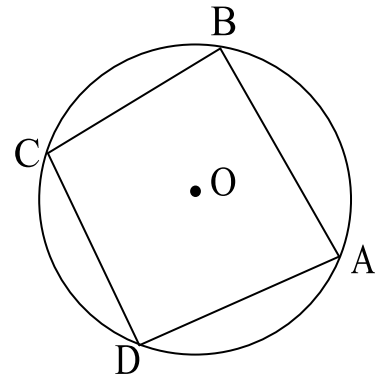
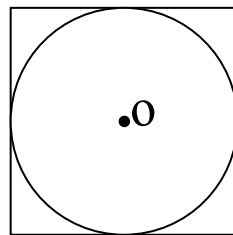
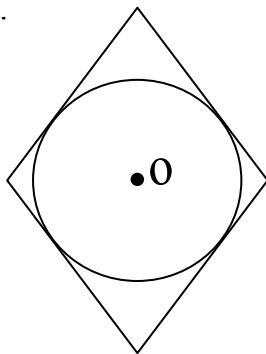
- Навколо будь-якого прямокутника можна описати коло (див. рисунок). Центром цього кола буде точка перетину діагоналей прямокутника.
- Навколо будь-якої рівнобедреної трапеції можна описати коло (див. рисунок).

- Якщо всі сторони чотирикутника дотикаються до кола, то такий чотирикутник називається **описаним навколо кола** (коло вписане в чотирикутник).

Якщо чотирикутник $ABCD$ описаний навколо кола (або коло вписане в чотирикутник $ABCD$), то $AD + BC = AB + CD$ (див. рисунок), і навпаки: якщо в опуклого чотирикутника суми довжин протилежних сторін рівні, то в нього можна вписати коло – **властивість і ознака описаного чотирикутника.**

Наслідок

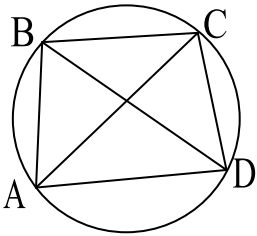
- У ромб і квадрат можна вписати коло, його центр – точка перетину діагоналей (див. рисунки).



2. Якщо трапеція або ромб описані навколо кола, то їх висоти дорівнюють діаметру кола.
3. Якщо в трапецію вписати коло, то кут утворений бісектрисами кутів, прилеглих до бічної сторони трапеції, - прямий.

Теорема Птолемея

В опуклому чотирикутнику, вписаного в коло, добуток діагоналей дорівнює сумі добутків протилежних сторін:



$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

Це потрібно вміти!

1. Радіус кола, описаного навколо прямокутника, дорівнює 6,5 см. Одна із сторін прямокутника дорівнює 5 см. Знайти довжину іншої сторони прямокутника.

Розв'язання

Нехай даний прямокутник $ABCD$ - вписаний в коло, $AB = 5$ см.

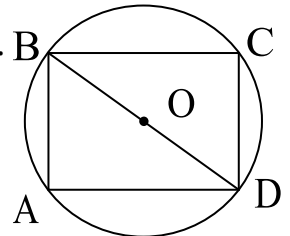
Діаметр кола, описаного навколо прямокутника, є діагональ прямокутника BD .

$$BD = 2R = 2 \cdot 6,5 = 13(\text{см})$$

З $\triangle ABD (\angle A = 90^\circ)$:

$$AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12(\text{см})$$

Відповідь: 12 см.



2. Три кути чотирикутника, вписаного в коло, узяті в порядку наступності, відносяться як 2: 6: 7. Знайдіть кути чотирикутника.

Розв'язання

Нехай градусні міри цих кутів дорівнюють $2x, 6x, 7x (x > 0)$. Оскільки чотирикутник вписаний в коло, то сума протилежних кутів $= 180^\circ$.

$$\text{Отже, } 2x + 7x = 180^\circ.$$

$$\text{Звідси } 9x = 180, x = 20.$$

$$\text{Отже, кути чотирикутника дорівнюють: } 40^\circ, 120^\circ, 140^\circ \text{ і } 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Відповідь: $40^\circ, 120^\circ, 140^\circ, 60^\circ$.

3. Діагоналі ромба дорівнюють 30 см і 40 см. Знайти відрізки, на які ділить сторону ромба точка дотику вписаного в нього кола.

Розв'язання

Нехай $ABCD$ - даний ромб, AC і BD – його діагоналі,

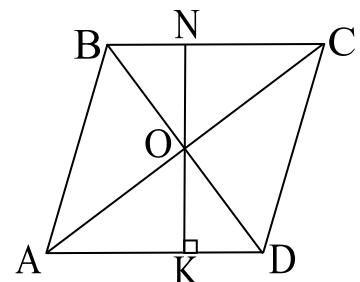
$$AC = 40 \text{ см}, BD = 30 \text{ см}. O - \text{точка перетину діагоналей.}$$

Діагоналі ромба в точці перетину діляться навпіл, тому

$$OA = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 40 = 20 (\text{см}), OD = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15 (\text{см}).$$

З $\triangle AOD (\angle O = 90^\circ, \text{бо діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом})$:

$$AD^2 = AO^2 + OD^2$$



$$AD = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25(\text{см})$$

K - точка дотику вписаного кола зі стороною, $OK \perp AD$.

Нехай $KD = x$ см, тоді $AK = 25 - x$ см.

З $\triangle AKO$ ($\angle K = 90^\circ$)

$$OK^2 = OA^2 - AK^2 = 20^2 - (25 - x)^2$$

З $\triangle DKO$ ($\angle K = 90^\circ$)

$$OK^2 = OD^2 - KD^2 = 15^2 - x^2$$

Звідси

$$20^2 - (25 - x)^2 = 15^2 - x^2$$

$$400 - 625 + 50x - x^2 = 225 - x^2$$

$$50x = 450$$

$$x = 450 : 50 \quad x = 9$$

Отже, $KD = 9$ см, $AK = 25 - 9 = 16$ (см).

Відповідь: 16 см, 9 см.

4. Одна з бічних сторін трапеції поділяється точкою дотику вписаного кола на відрізки 4 см і 9 см. Знайти радіус кола.

Розв'язання

Нехай $ABCD$ дана трапеція, в яку вписане коло з центром O .

Точки M, N, K, F - точки дотику вписаного кола до сторін трапеції, $AM = 9$ см, $BM = 4$ см. Проведемо висоту BE . Радіус кола, вписаного в трапецію,

$$OF = \frac{BE}{2} \cdot AB = AM + MB = 9 + 4 = 13(\text{см})$$

За властивістю дотичної $AF = AM$, а $BM = BN = EF$, тоді $AE = AF - FE = 9 - 4 = 5$ (см).

З $\triangle ABE$ ($\angle E = 90^\circ$) $BE^2 = AB^2 - AE^2$

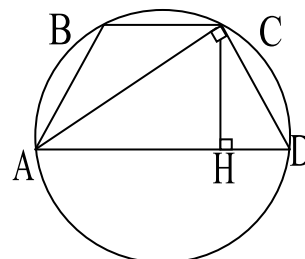
$$BE = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12(\text{см}).$$

$$\text{Радіус кола } OF = \frac{NF}{2} = \frac{BE}{2} = \frac{12}{2} = 6(\text{см})$$

Відповідь: 6 см

5. Центр кола, описаного навколо рівнобічної трапеції лежить на її більшій основі. Знайдіть радіус цього кола, якщо діагональ трапеції дорівнює 20 см, а її висота - 12 см.

Розв'язання



Нехай $ABCD$ – дана трапеція, $BC \parallel AD$, $AD > BC$. Так як AD діаметр описаного кола, то $\angle ACD = 90^\circ$. CH – висота трапеції, $CH \perp AD$.

$$\text{З } \triangle ACH (\angle H = 90^\circ) AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16(\text{см}).$$

CH – висота прямокутного трикутника $\triangle ACD$ проведена до гіпотенузи, тому $CH^2 = AH \cdot HD$

$$HD = \frac{CH^2}{AH} = \frac{12^2}{16} = 9(\text{см}).$$

$$AD = AH + HD = 16 + 9 = 25(\text{см}).$$

$$\text{Отже, радіус кола } R = \frac{1}{2} \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 25 = 12,5(\text{см}).$$

Відповідь: 12,5 см.

6. Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 7 см і 25 см, а діагональ – 20 см.

Розв'язання

Нехай $ABCD$ – дана трапеція, $BC \parallel AD$, $BC = 7\text{ см}$, $AD = 25$, $AB = CD$,

$AC = 20\text{ см}$. Коло, описане навколо трапеції – це коло, описане навколо $\triangle ACD$.

Проведемо висоту CM . Так як трапеція рівнобічна, то $DM = \frac{AD - BC}{2} = 9(\text{см})$,

$$AM = 25 - 9 = 16\text{ см}.$$

$$\text{З } \triangle AMC (\angle M = 90^\circ) CM^2 = AC^2 - AM^2 = 20^2 - 16^2$$

$$CM = 12\text{ см}.$$

$$\text{З } \triangle CMD (\angle M = 90^\circ) CD^2 = CM^2 + MD^2$$

$$CD = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15(\text{см}).$$

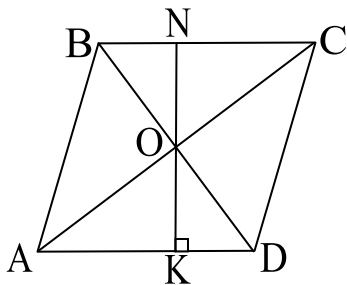
$$\sin \angle D = \frac{CM}{CD} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Радіус описаного кола } R = \frac{AC}{2 \sin \angle CDA} = \frac{20}{2 \cdot \frac{4}{5}} = 12,5(\text{см}).$$

Відповідь: 12,5 см.

7. Сторона ромба і одна з його діагоналей відповідно дорівнюють 9 см і 12 см. Знайти відрізки, на які ділить сторону ромба точка дотику вписаного в нього кола.

Розв'язання



Нехай $ABCD$ – даний ромб, $AD = 9\text{ см}$, $BD = 12\text{ см}$. O – точка перетину діагоналей. За властивістю діагоналей ромба $AC \perp BD$, $BO = OD = \frac{1}{2} \cdot BD = 6(\text{см})$.

$$\text{З } \triangle AOD (\angle O = 90^\circ) \cos \angle AOD = \frac{OD}{AD} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{З } \triangle KOD (\angle K = 90^\circ) DK = OD \cos ADO = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4(\text{см})$$

$$AK = AD - DK = 9 - 4 = 5(\text{см}).$$

Відповідь: 4 см, 5 см.

Спробуй виконати сам!

1. Обчислити радіус кола, описаного навколо прямокутника зі сторонами 6 см і 8 см.

Відповідь: 5 см.

2. Діагоналі ромба дорівнюють 12 см і $6\sqrt{5}$ см. Знайти відрізки, на які ділить сторону ромба точка дотику вписаного кола.

Відповідь: 4 см і 5 см.

3. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 9 см і 21 см, а висота – 8 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо даної трапеції.

Відповідь: $\frac{85}{8}$ см.

4. Одна з бічних сторін трапеції поділяється точкою дотику вписаного кола на відрізки 25 см і 9 см. Знайти висоту трапеції.

Відповідь: 30 см.

5. Сторона ромба і одна з його діагоналей відповідно дорівнюють 25 см і 20 см. Знайти відрізки, на які ділить сторону точка дотику вписаного в нього кола.

Відповідь: 4 см і 21 см.

6. Менша основа прямокутної трапеції дорівнює 10 см. Знайти більшу основу трапеції, якщо довжина кола, вписаного трапецію, дорівнює 12π см.

Відповідь: 15 см.