

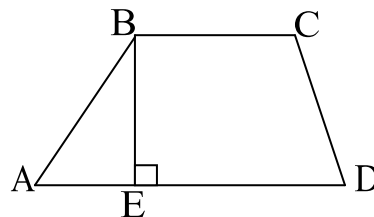
Заняття 3. Тема.Трапеція

Це потрібно знати!

Трапеція – це чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші непаралельні.

$ABCD$ - трапеція; $AD \parallel BC$; AD і BC - основи трапеції;

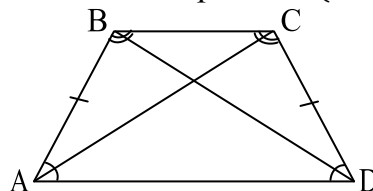
AB і CD - бічні сторони; $BE = h$ - висота



Рівнобедреною (рівнобічною) називається трапеція з рівними бічними сторонами ($AB = CD$).

Властивості рівнобедреної трапеції:

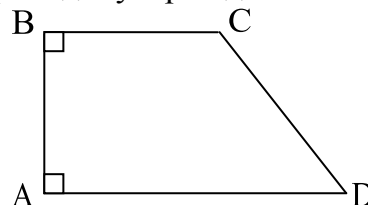
- 1) Кути при основі рівні;
- 2) Діагоналі рівні.



Прямокутною називається трапеція, у якої бічна сторона перпендикулярна до основ.

$ABCD$ - прямокутна трапеція, $AB \perp AD$, $AB \perp BC$.

$h = AB$ –висота прямокутної трапеції.

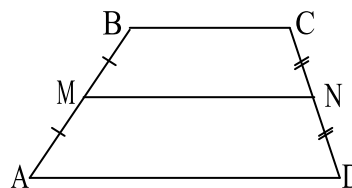


Середня лінія трапеції

Середня лінія трапеції – це відрізок, який сполучає середини її бічних сторін.

$ABCD$ – трапеція, $BC \parallel AD$;

$AM = MB$, $DN = NC$, MN –середня лінія трапеції.



Властивості середньої лінії трапеції: середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі.

Властивості трапеції

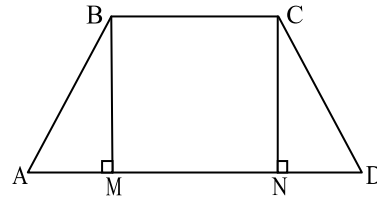
- 1) В рівнобічній трапеції проекція діагоналі на більшу основу дорівнює середній лінії трапеції.
- 2) В трапецію можна вписати коло, якщо суми протилежних сторін рівні.
- 3) Якщо в рівнобічну трапецію вписано коло, то її бічна сторона дорівнює середній лінії.
- 4) Якщо трапеція вписана в коло, то вона рівнобічна, а сума її внутрішніх протилежних кутів дорівнює 180° .
- 5) Середня лінія трапеції ділить навпіл будь-який відрізок, кінці якого лежать на основах трапеції.
- 6) В рівнобічній трапеції, діагоналі якої є взаємно перпендикулярними, висота дорівнює середній лінії.
- 7) Площа рівнобічної трапеції, діагоналі якої взаємно перпендикулярні, дорівнює квадрату її висоти.
- 8) Висота рівнобічної трапеції, в яку можна вписати коло, є середнім геометричним її основ: $h^2 = a \cdot b$, де a і b –основи трапеції.
- 9) Радіус кола, описаного навколо трапеції, дорівнює радіусу кола, описаного навколо трикутника, вершини якого лежать в вершинах даної трапеції.

10) $d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + 2ab$, де a і b – основи трапеції, c, d – бічні сторони, d_1 і d_2 – діагоналі трапеції.

Це потрібно вміти!

1. Різниця основ рівнобічної трапеції дорівнює 12 см, а її висота дорівнює 8 см. Знайти бічну сторону трапеції.

Розв'язання



Нехай $ABCD$ – дана трапеція, $AD - BC = 12$ см, BM – висота, $BM = 8$ см.

Проведемо висоту $CN \perp AD$.

$BM = CN = 8$ см.

$AM = ND = \frac{AD - BC}{2} = \frac{12}{2} = 6$ (см), бо трапеція рівнобічна.

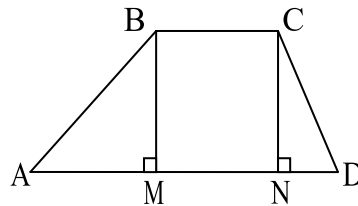
З $\triangle ABM$ ($\angle M = 90^\circ$) $AB = \sqrt{AM^2 + BM^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (см).

$AB = CD = 10$ см

Відповідь: 10 см.

2. Основи трапеції дорівнюють 11 см і 25 см, а бічні сторони – 13 см і 15 см. Знайти висоту трапеції.

Розв'язання



Нехай $ABCD$ – дана трапеція з основами AD і BC , $AD = 25$ см, $BC = 11$ см, $AB = 15$ см, $CD = 13$ см. Проведемо висоти BM і CN , $BM \perp AD$, $CN \perp AD$, $BC = MN = 11$ см. $AM + ND = AD - MN = 25 - 11 = 14$ (см).

Нехай $MA = x$ см, тоді $ND = 14 - x$ см.

З $\triangle CND$ ($\angle N = 90^\circ$) $CN^2 = CD^2 - ND^2$

$CN^2 = 13^2 - (14 - x)^2$.

З $\triangle AMB$ ($\angle M = 90^\circ$) $BM^2 = AB^2 - AM^2$, $BM^2 = 15^2 - x^2$.

Так як $BM = CN$, то маємо рівняння

$$169 - 196 + 28x - x^2 = 225 - x^2$$

$$28x = 252$$

$$x = 9$$

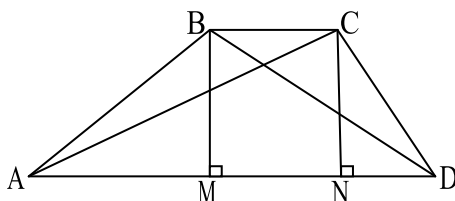
Отже, $AM = 9$ см, $ND = 14 - 9 = 5$ см.

$BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{144} = 12$ (см).

Відповідь: 12 см.

3. Основи трапеції дорівнюють 2 см і 19 см, а діагоналі – 13 см і 20 см. Знайти висоту трапеції.

Розв'язання



$ABCD$ – трапеція з основами AD і BC , $AD = 19$ см, $BC = 2$ см.

AC і BD – діагоналі, $AC = 20$ см, $BD = 13$ см.

Проведемо висоти $BM \perp AD$, $CN \perp AD$, $BM = CN$, $BC = MN$.

Нехай $AM = x$, $AN = AM + MN$, $AN = x + 2$, а $DM = AD - AM$,
 $DM = 19 - x$.

З $\triangle ACN$ ($\angle N = 90^\circ$): $CN^2 = AC^2 - AN^2$

$$CN^2 = 20^2 - (x + 2)^2$$

З $\triangle BMD$ ($\angle M = 90^\circ$): $BM^2 = BD^2 - DM^2$

$$BM^2 = 13^2 - (19 - x)^2.$$

Так як $CN = BM$, то маємо рівняння:

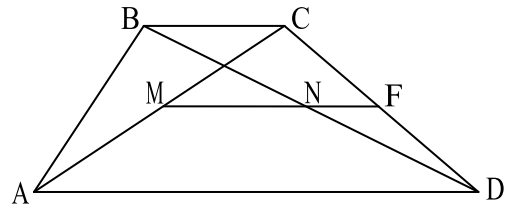
$$20^2 - (x + 2)^2 = 13^2 - (19 - x)^2 \quad \text{Звідки } 42x = 588 \quad x = 14$$

Отже, $BM = \sqrt{169 - 25} = 12$ (см).

Відповідь: 12 см.

4. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 20 см. Знайдіть довжину відрізка, який сполучає середини діагоналей трапеції.

Розв'язання



Нехай $ABCD$ – дана трапеція з основами $AD = 20$ см, $BC = 10$ см, точки M і N – середини діагоналей AC і BD відповідно. У трикутнику ACD проведемо середню лінію MF , паралельну AD . Оскільки точка M – середина AC , то за теоремою Фалеса точка N – середина BD . Тоді MN належить MF . $MF = \frac{AD}{2} = \frac{20}{2} = 10$ (см).

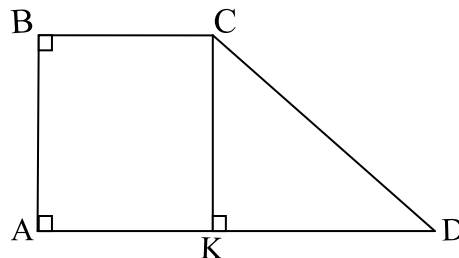
Оскільки N – середина BD , то F – середина CD , то NF – середня лінія трикутника BCD

і $NF = \frac{BC}{2}$, $NF = 3$ см.

Отже, $MN = MF - NF = 10 - 3 = 7$ (см). Відповідь: 7 см.

5. Основи прямокутної трапеції дорівнюють 8 см і 14 см, а один із кутів дорівнює 135° . Знайдіть меншу бічну сторону трапеції

Розв'язання



Нехай $ABCD$ дана прямокутна трапеція, AD і BC – основи, $\angle BCD = 135^\circ$, $BC = 8$ см, $AD = 14$ см.

Проведемо висоту $CK \perp AD$, $ABCK$ – прямокутник, $AK = BC = 8$ см, $AB = CK$, $AB < CD$. Так як $\angle BCD = 135^\circ$, $\angle BCK = 90^\circ$, то $\angle DCK = 45^\circ$.

В трикутнику CKD $\angle CKD = 90^\circ$, $\angle DCK = 45^\circ$, $\angle CDK = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, значить,

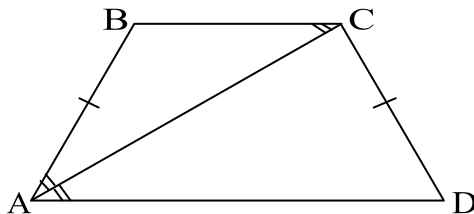
$\triangle CKD$ – рівнобедрений з основою CD , звідси, $CK = KD$. $KD = AD - AK = 14 - 8 = 6$ (см).

Отже, $CK = AB = 6$ см.

Відповідь: 6 см.

6. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута, одна з основ на 6 см більша від іншої. Знайдіть середню лінію трапеції.

Розв'язання



Нехай $ABCD$ - рівнобічна трапеція ($AB = CD$), AC - бісектриса $\angle A$. Нехай $BC = x$ см ($x > 0$), тоді $(x + 6)$ см - нижня основа трапеції. Оскільки $\angle BCA = \angle CAD$ і $BC \parallel AD$, а AC - січна, то $\angle BCA = \angle CAD$, і отже трикутник ABC рівнобедрений з основою AC . Таким чином, $AB = BC = CD = x$ см. Тоді за умовою $P_{ABCD} = x + x + x + x + 6 = 74$; $4x = 68$; $x = 17$. Отже,

$BC = 17$ см, $AD = 17 + 6 = 23$ (см). Таким чином, середня лінія трапеції дорівнює $\frac{23+17}{2} = 20$ (см).

Відповідь: 20 см.

Спробуй сам!

1. У рівнобічній трапеції менша основа дорівнює 10 см, бічна сторона – 4 см, а кут між бічною стороною та більшою основою дорівнює 60° . Знайдіть середню лінію трапеції. Відповідь: 12 см.
2. У трапеції $ABCD$ - бічна сторона AB перпендикулярна до основ, а бічна сторона CD дорівнює діагоналі AC . Знайдіть середню лінію трапеції, якщо $BC = 1$ м. Відповідь: 1,5 м.
3. Різниця основ рівнобічної трапеції дорівнює 10 см, а її бічна сторона дорівнює 13 см. Знайти висоту трапеції. Відповідь: 12 см.
4. Основи трапеції дорівнюють 4 см і 17 см, а діагоналі – 10 см і 17 см. Знайти висоту трапеції. Відповідь: 8 см.
5. Основи трапеції 2 см і 6 см, а бічні сторони – 13 см і 15 см. Знайти висоту трапеції. Відповідь: 12 см.
6. У рівнобічній трапеції з гострим кутом 60° сума основ дорівнює 86 см, а бічна сторона – 22 см. Знайти основи трапеції. Відповідь: 32 см, 54 см.