

Заняття 1. Тема: Чотирикутник. Паралелограм.

Це потрібно знати !

Чотирикутник.

Чотирикутником називається фігура, яка складається з чотирьох точок і чотирьох відрізків, що послідовно їх сполучають. При цьому жодні три з даних точок не повинні лежати на одній прямій, а відрізки, що їх сполучають, не повинні перетинатися.

Точки називаються **вершинами** чотирикутника, а відрізки, що їх сполучають, – сторонами чотирикутника.

Вершини чотирикутника називаються **сусідніми**, якщо вони є кінцями однієї з його сторін.

Вершини чотирикутника, які не є сусідніми називаються **протилежними**.

Відрізки, що сполучають протилежні вершини чотирикутника, називаються діагоналями.

Сторони чотирикутника, що виходять з однієї вершини, називаються сусідніми сторонами.

Сторони чотирикутника, які не мають спільного кінця називаються протилежними.

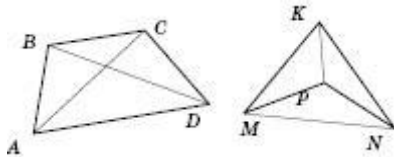
Периметром чотирикутника називається сума довжин його сторін.

Сума кутів чотирикутника дорівнює 360°

Чотирикутник позначають записуючи його вершини.

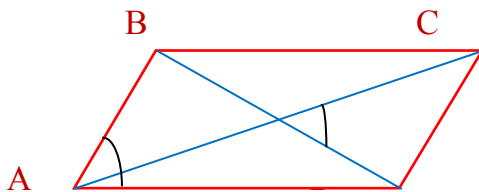
Чотирикутник називається **опуклим**, якщо він лежить в одній півплощині відносно будь-якої прямої, що містить його сторону.

На рисунку зліва $ABCD$ — опуклий чотирикутник; AC , BD — його діагоналі. На рисунку справа $KMPN$ — не опуклий чотирикутник; KP , MN — його діагоналі.



Паралелограм

Паралелограм – чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні.



Властивості паралелограма:

1) протилежні сторони рівні, протилежні кути рівні;

$$AB = CD; \quad BC = AD; \quad \angle BAD = \angle BCD; \quad \angle ABC = \angle ADC$$

2) діагональ ділить паралелограм на два рівні трикутники;

$$\triangle ABD = \triangle CDB; \quad \triangle ABC = \triangle CDA$$

3) діагоналі паралелограма перетинаються і точкою перетину діляться пополам; $AO = OC; \quad BO = OD$

4) сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів всіх його сторін.

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(AB^2 + AD^2)$$

Ознаки паралелограма:

- 1) якщо в чотирикутнику дві сторони паралельні і рівні, то цей чотирикутник – паралелограм;
- 2) якщо в чотирикутнику протилежні сторони рівні, то цей чотирикутник – паралелограм;
- 3) якщо діагоналі чотирикутника в точці перетину діляться пополам, то цей чотирикутник – паралелограм.
- 4) Якщо в чотирикутнику протилежні кути рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.
- 5) Якщо в чотирикутнику кути, що є прилеглими до кожної із сторін, у сумі дорівнюють 180° , то цей чотирикутник — паралелограм.
- 6) Якщо кожна діагональ поділяє чотирикутник на два рівні трикутники, то цей чотирикутник — паралелограм.

Кут між висотами паралелограма

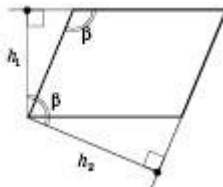
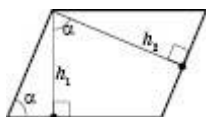
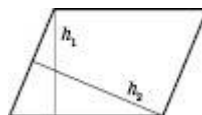
Висота паралелограма — це відрізок, перпендикулярний до протилежних сторін паралелограма з кінцями на цих сторонах.

На рисунку h_1 і h_2 — висоти паралелограма.

Найчастіше висоти опускають із вершин паралелограма.

Із кожної вершини паралелограма можна провести дві висоти.

Кут між ними дорівнюватиме куту паралелограма при сусідній вершині. На рисунку зліва зображений кут між висотами паралелограма, опущеними з тупого кута, на рисунку справа — між висотами, опущеними з гострого кута:



Властивості бісектрис кутів паралелограма

1. Бісектриси сусідніх кутів паралелограма перпендикулярні.
2. Бісектриси протилежних кутів паралелограма паралельні або збігаються (якщо паралелограм — ромб).
3. Бісектриса кута паралелограма відокремлює від нього рівнобедрений трикутник.
4. Чотирикутник, що утворився при перетині бісектрис кутів паралелограма, — прямокутник.

Це потрібно вміти !

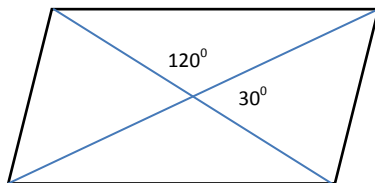
Задача 1. Сума двох сторін паралелограма 48 см, а периметр дорівнює 88 см. Знайдіть сторони паралелограма.

Розв'язання

Якби ці сторони були суміжні (тобто $a + b = 48$), то периметр дорівнював би: $P = 2(a + b) = 2 \cdot 48 = 96$ см. Отже маємо суму протилежних сторін. Так як вони рівні, то одна із сторін паралелограма дорівнює: $48 : 2 = 24$ см. Тоді друга сторона $\frac{88}{2} - 24 = 20$ см.

Відповідь: 20 см, 24 см.

Задача 2. Діагоналі паралелограма 20 см і 28 см, а кут між ними 30° . Знайдіть сторони паралелограма.



Розв'язання

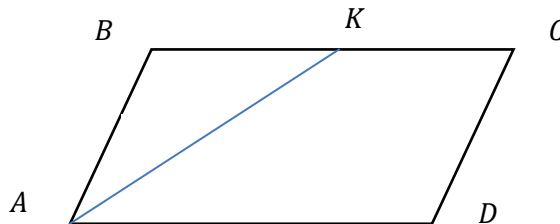
Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться пополам, утворюючи два трикутника: зі сторонами $\frac{20}{2} = 10$ см, $\frac{28}{2} = 14$ см та кутом 30° між ними і зі сторонами $\frac{20}{2} = 10$ см, $\frac{28}{2} = 14$ см та кутом $180^\circ - 30^\circ = 120^\circ$ між ними. За теоремою косинусів маємо:

одна із сторін дорівнює $\sqrt{10^2 + 14^2 - 2 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{156} = 2\sqrt{39}$ см;

друга сторона дорівнює $\sqrt{10^2 + 14^2 + 2 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{436} = 2\sqrt{109}$ см;

Відповідь: $2\sqrt{39}$ см, $2\sqrt{109}$ см.

Задача 3. Бісектриса гострого кута паралелограма ділить його сторону на відрізки у відношенні 3 : 4. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр 88 см.



Розв'язання

В паралелограмі $\angle BAK = \angle KAD$, так як за умовою AK – бісектриса, а $\angle BKA = \angle KAD$ як зовнішні різносторонні при паралельних та січній, отже $\angle BAK = \angle BKA$ і трикутник ABK – рівнобедрений з основою AK , тобто $AB = BK$.

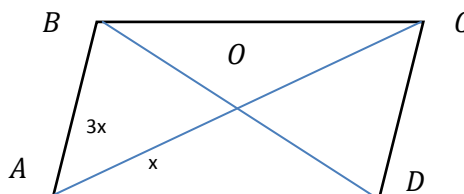
Можливі два випадки:

1) $BK = 3x$; $KC = 4x$. Тоді $AB = 3x$, і паралелограм має сторони $3x$ і $3x + 4x = 7x$. Периметр паралелограма $P = 2(3x + 7x) = 20x$. За умовою $20x = 88$, звідки $x = 88 : 20 = 4,4$ і сторони паралелограма дорівнюють $3 \cdot 4,4 = 13,2$ см та $7 \cdot 4,4 = 30,8$ см.

2) $BK = 4x$; $KC = 3x$. Тоді $AB = 4x$, і паралелограм має сторони $4x$ і $3x + 4x = 7x$. Периметр паралелограма $P = 2(4x + 7x) = 22x$. За умовою $22x = 88$, звідки $x = 88 : 22 = 4$ і сторони паралелограма дорівнюють $4 \cdot 4 = 16$ см та $7 \cdot 4 = 28$ см.

Відповідь: 13,2 см і 30,8 см, або 16 см і 28 см.

Задача 4. Діагональ паралелограма ділить його гострий кут 80° у відношенні 1 : 3. Знайдіть кут між діагоналями паралелограма.



Розв'язання

Позначимо відношення через x . Тоді діагональ ділить кут на два кути: x і $3x$, а за умовою їх сума становить 80° : $x + 3x = 80^\circ$, звідки $x = 20^\circ$, $3x = 60^\circ$. Так як сума сусідніх кутів паралелограма дорівнює 180° (як внутрішніх односторонніх), то другий кут дорівнює $180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.

Друга діагональ також ділить тупий кут паралелограма у відношенні $1 : 3$, так як маємо відношення внутрішніх односторонніх кутів. Отже маємо $x + 3x = 100^\circ$, звідки $x = 25^\circ$, $3x = 75^\circ$.

За теоремою про суму кутів трикутника маємо кут між діагоналями:
 $180^\circ - 60^\circ - 75^\circ = 45^\circ$.

Відповідь: 45° .