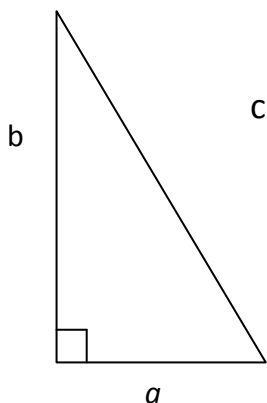


## Заняття 6. ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК.

### Це потрібно знати!

Так називається трикутник, у якого один кут прямий. Сторони, що прилягають до прямого кута, називаються катетами, а сторона, протилежна до прямого кута, - гіпотенузою.

#### ✓ ТЕОРЕМА ПІФАГОРА



У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи

дорівнює сумі квадратів катетів:  $a^2 + b^2 = c^2$ .

Справедливе і обернене твердження: якщо для сторін

$a, b, c$  трикутника виконується рівність  $a^2 + b^2 = c^2$ ,

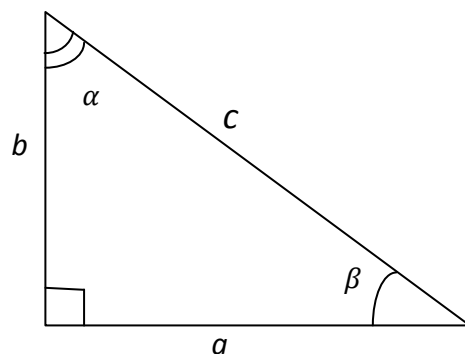
то трикутник є прямокутним, причому  $c$  - його гіпотенуза.

#### ✓ СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ СТОРОНАМИ І КУТАМИ У ПРЯМОКУТНОМУ ТРИКУТНИКУ

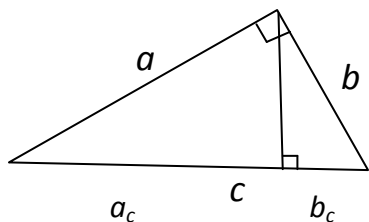
$$a = c \sin \alpha = c \cos \beta = b \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{ctg} \beta,$$

$$b = c \sin \beta = c \cos \alpha = a \operatorname{tg} \beta = a \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a}{\cos \beta} = \frac{b}{\cos \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}.$$



#### ✓ ВЛАСТИВОСТІ ПРОЕКЦІЙ КАТЕТІВ



Висота, опущена на гіпотенузу,  
є середнім пропорційним між  
проекціями катетів на гіпотенузу:

$$\frac{a_c}{h} = \frac{h}{b_c} \Leftrightarrow h^2 = a_c b_c.$$

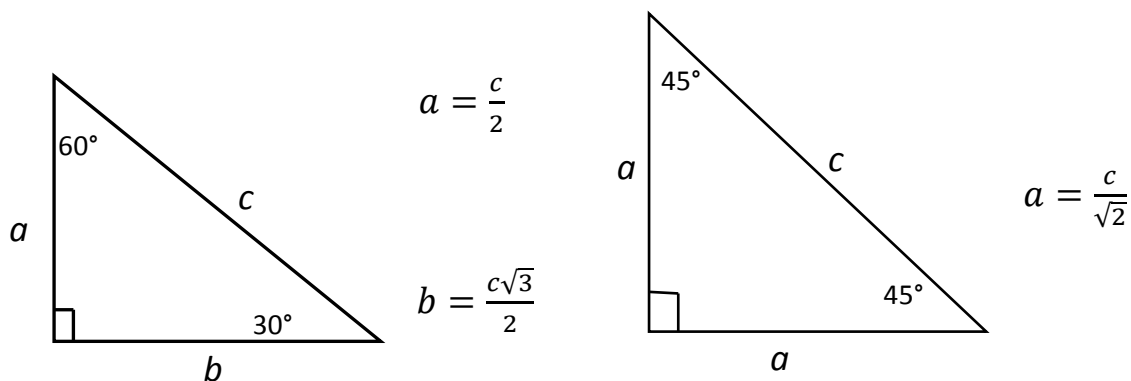
Кожний катет є середнім пропорційним між гіпотенузою і проекцією цього катета на гіпотенузу:

$$\frac{a_c}{a} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow a^2 = a_c c;$$

$$\frac{b_c}{b} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow b^2 = b_c c.$$

Висота виражається через сторони і проекції катетів:  $h = \frac{ab}{c} = \frac{ab}{a_c + b_c}$

✓ ОКРЕМІ ВИПАДКИ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ



У прямокутному трикутнику бісектриса прямого кута поділяє навпіл кут між висотою і медіаною, проведеними з цієї ж вершини.

✓ КОЛО, ВПИСАНЕ У ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК

Радіус вписаного кола:  $r = \frac{ab}{a+b+c}$ ;  $r = \frac{a+b-c}{2}$ .

✓ КОЛО, ОПИСАНЕ НАВКОЛО ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА

Центр описаного кола співпадає з серединою гіпотенузи, а радіус дорівнює:

- половині гіпотенузи:  $R = \frac{c}{2}$ ;
- медіані, проведений до гіпотенузи:  $R = m_c$ .

***Це потрібно вміти!***

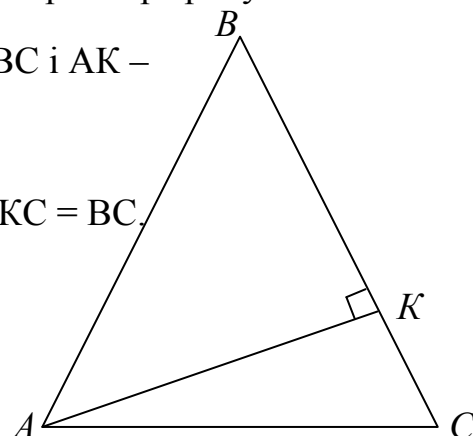
**Приклад 1.** У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до бічної сторони, ділить цю сторону на відрізки 12 см та 3 см, рахуючи від вершини трикутника, яка лежить навпроти основи. Знайти периметр трикутника.

■ Нехай  $\triangle ABC$  даний трикутник у якому  $AB = BC$  і  $AK$  – висота, проведена до бічної сторони  $BC$ .

$AB = BC = 12 + 3 = 15$  см, так як за умовою  $BK + KC = BC$ .

Розглянемо  $\triangle AKB$ :  $AB = 15$  см,  $BK = 12$  см і

$\angle AKB = 90^\circ$ . Тоді за теоремою Піфагора



$$AK^2 = AB^2 - BK^2 = 225 - 144 = 121, \text{ отже}$$

$AK = 11$  см. Далі розглянемо  $\triangle AKC$ :  $AK = 11$  см,  $KC = 3$  см,  $\angle AKC = 90^\circ$ , знову застосувавши теорему Піфагора маємо:  $AC^2 = AK^2 + KC^2 = 121 + 9$ , отже  $AC = \sqrt{130}$  см. Отже  $P \triangle ABC = 15 + 15 + \sqrt{130} = 30 + \sqrt{130}$  (см).

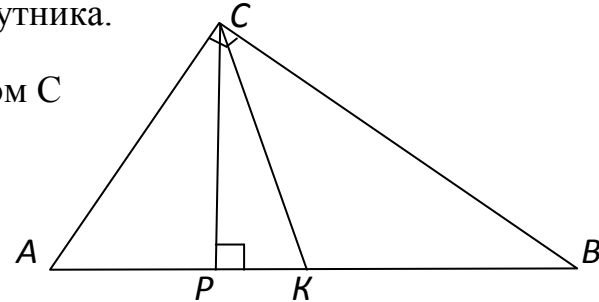
Відповідь:  $P \triangle ABC = 30 + \sqrt{130}$  см. ■

**Приклад 2.** Медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, на 18 см більша своєї проекції на гіпотенузу. Вершина прямого кута віддалена від гіпотенузи на 24 см. Знайти периметр трикутника.

■ Нехай  $ABC$  даний трикутник з прямим кутом  $C$

і медіаною  $CK$ , проведеної до гіпотенузи  $AB$ .

Так як центр кола, описаного навколо



прямокутного трикутника, лежить на середині гіпотенузи, то  $BK = AK = KC$  (як радіуси описаного кола). Проведемо висоту  $CP$  з вершини прямого кута, тоді проекцією медіани  $CK$  на гіпотенузу  $AB$  є відрізок  $PK$ . За умовою задачі  $CK$  на 18 см більше ніж  $PK$  і  $CP = 24$  см (як відстань від точки до прямої).

Нехай у  $\triangle CPK$  ( $\angle P = 90^\circ$ )  $PK = x$ , тоді  $CK = x + 18$ . За теоремою Піфагора

$$CK^2 = CP^2 + PK^2, \text{ отже складемо та розв'яжемо рівняння: } (x + 18)^2 = x^2 + 24^2; x^2 + 36x + 324 = x^2 + 576; 36x = 252; x = 7. \text{ Отже } PK = 7 \text{ см,}$$

$$CK = 7 + 18 = 25 \text{ см, тому } AK = 25 \text{ см і з цього слідує, що } PK = 18 \text{ см.}$$

Тепер з прямокутного трикутника  $CPA$  знайдемо  $AC$ :  $AC = \sqrt{18 \cdot 50} = 30$  см, аналогічно з прямокутного трикутника  $CPB$  знайдемо  $CB$ :

$$CB = \sqrt{32 \cdot 50} = 40 \text{ см. Отже : } P \triangle ABC = 30 + 40 + 50 = 120 \text{ см.}$$

Відповідь: 120 см. ■

**Спробуй виконати сам!**

1. Катети прямокутного трикутника відносяться як 2 : 1, а гіпотенуза дорівнює  $5\sqrt{5}$  см. Знайти у сантиметрах більший катет.  
Відповідь : 10 см
2. У прямокутному трикутнику катет дорівнює 12, а тангенс прилеглого кута дорівнює  $\frac{5}{6}$ . Знайти квадрат довжини гіпотенузи.  
Відповідь : 244.

3. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює  $\sqrt{5}$  см, а проекція іншого катета на гіпотенузу дорівнює 4 см. Знайти у сантиметрах гіпотенузу.  
Відповідь : 5 см.
4. Точка дотику вписаного у прямокутний трикутник кола ділить гіпотенузу на відрізки 3 см і 10 см. Знайти у квадратних сантиметрах площу трикутника.  
Відповідь :  $30 \text{ см}^2$ .
5. У прямокутному трикутнику катет дорівнює 12, а гіпотенуза – 13. Знайти квадрат довжини бісектриси трикутника, проведеної з вершини меншого кута.  
Відповідь : 149,76.
6. Від високої тополі падає тінь завдовжки 9 м , а від вертикальної жердини завдовжки 2 м – тінь завдовжки 1,2 м. Знайти висоту тополі.  
Відповідь : 15 м.