

### Заняття 3. СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ СТОРОНАМИ ТА КУТАМИ ТРИКУТНИКА

*Це потрібно знати!*

Теорема синусів:  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ .

Наслідок теореми синусів:  $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$ , де  $R$  — радіус описаного кола.

Теорема косинусів:  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$ .

*Це потрібно вміти!*

**Приклад 1.** Сторони трикутника дорівнюють 4 см і 8 см. Яке найменше ціле значення повинна мати третя сторона, щоб кут між двома даними сторонами був тупим?

■ Якщо в трикутнику зі сторонами  $a, b$  і  $c$  справджується нерівність  $a^2 + b^2 < c^2$ , то кут, протилежний стороні  $c$ , тупий. Маємо:  $4^2 + 8^2 < c^2$ ;  $80 < c^2$ ;  $c > 9$ .

Відповідь:  $c > 9$ . ■

**Приклад 2.** У трикутнику  $MKD$   $\angle K = 60^\circ$ . Радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює 2 см. Скільки сантиметрів має радіус кола, описаного навколо трикутника  $MOD$ , де  $O$  — точка перетину бісектрис трикутника  $MKD$ ?

■ Нехай  $MKD$  — заданий трикутник, у якого  $MK = d$ ,  $KD = m$ ,  $MD = k$ ,  $\angle K = 60^\circ$ ,  $R$  — радіус описаного кола,  $R = 2$  см,  $O$  — точка перетину бісектрис. За наслідком з теореми синусів  $\frac{k}{\sin \angle K} = 2R$ .

Отримаємо:  $k = 2R \sin \angle K = 2 \cdot 2 \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$  (см), тобто  $MD = 2\sqrt{3}$  (см).

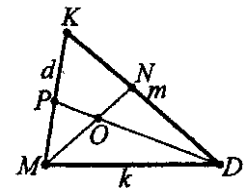
Нехай  $\angle M = 2x^\circ$ ,  $\angle D = 2y^\circ$ . За теоремою про суму кутів трикутника  $\angle M + \angle D + \angle K = 180^\circ$ ;  
 $2x + 2y + 60^\circ = 180^\circ$ ;  $2x + 2y = 120^\circ$ ;  $x + y = 60^\circ$ .

Оскільки  $MO$  і  $DO$  — бісектриси кутів  $M$  і  $D$  відповідно, то  $\angle OMD = x^\circ$ ,  $\angle ODM = y^\circ$ .

Із трикутника  $MOD$ :  $x + y + \angle MOD = 180^\circ$ ;  $\angle MOD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ .

За наслідком з теореми синусів  $\frac{MD}{\sin \angle MOD} = 2R_1$ , де  $R_1$  — радіус кола, описаного навколо трикутника  $MOD$ .  $\frac{2\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = 2R_1$ ,  $R_1 = \frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$  (см).

Відповідь. 2. ■



*Спробуй виконати сам!*

1. Сторони трикутника 12 см і 20 см, а кут між ними  $120^\circ$ . Знайти довжину медіани, проведеної до третьої сторони.

Відповідь:  $2\sqrt{19}$  см. Вказівка: продовжити медіану на таку ж саму довжину.

2. Сторони трикутника дорівнюють 7 м, 8 м і 10 м. знайти косинус найбільшого кута цього трикутника.

Відповідь:  $\frac{13}{112}$ .

3. Основа рівнобедреного трикутника 24 см, а бічна сторона -13 см. Знайти радіус кола, описаного навколо даного трикутника.  
Відповідь: 16,9 см.
4. Менша сторона трикутника, вписаного в коло, дорівнює 8 см, а вершини трикутника ділять коло на три дуги, градусні міри яких відносяться як 2 : 3 : 7. Знайти невідомі сторони трикутника.  
Відповідь:  $8\sqrt{2}$  см та  $4(\sqrt{6} + \sqrt{2})$  см.
5. Кути трикутника відносяться як 1 : 2 : 3. Знайти відношення протилежних їм сторін.  
Відповідь:  $1 : \sqrt{3} : 2$ .
6. Сторони трикутника пропорційні числам 7, 8 і 13. Знайти найбільший кут трикутника, якщо його периметр 56 см.  
Відповідь:  $120^\circ$ .