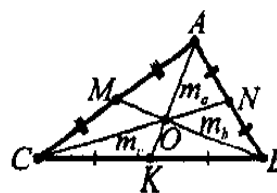


Заняття 2. ВИЗНАЧНІ ЛІНІЇ ТА ВИЗНАЧНІ ТОЧКИ ТРИКУТНИКА.

Це потрібно знати!



1. Медіана.

$CK = KB$, AK — медіана.

m_a — медіана, проведена до сторони a .

Медіани перетинаються в одній точці й діляться нею у відношенні 2:1, починаючи від вершини трикутника.

$$AO:OK = BO:OM = CO:ON = 2:1.$$

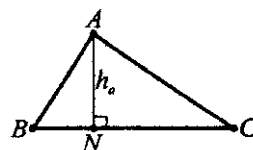
$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2};$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

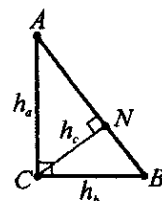
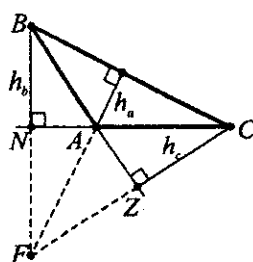
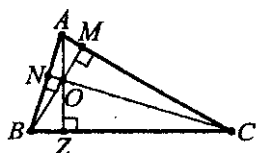
2. Висота.

$AN \perp BC$, AN — висота.

h_a — висота, проведена з вершини A . Висоти трикутника або їх продовження перетинаються в одній точці. У гострокутному трикутнику точка O перетину висот розміщена всередині трикутника; у тупокутному (точка F) — поза трикутником; у прямокутному (точка C) — у вершині



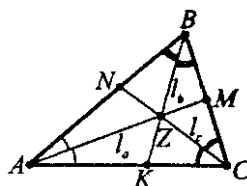
прямого кута.



Будь-яку висоту трикутника можна знайти за формулами $h_a = c \sin \beta$, $h_a = \frac{2S}{a}$, де S — площа трикутника.

3. Бісектриса.

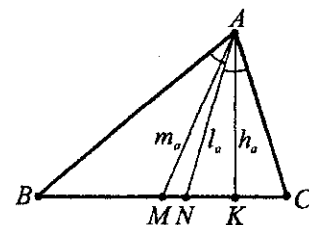
$\angle ABK = \angle CBK$, BK — бісектриса. $\frac{AB}{BC} = \frac{KA}{KC}$.



l_b — бісектриса кута B .

Бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.

У нерівнобедреному трикутнику кожна бісектриса лежить між медіаною і висотою, проведеними з цієї ж вершини: $h_a < l_a < m_a$.

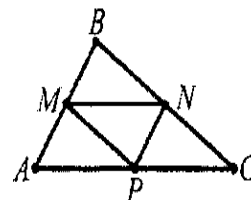


5. Середня лінія.

Середня лінія трикутника — це відрізок, який з'єднує середини двох його сторін.

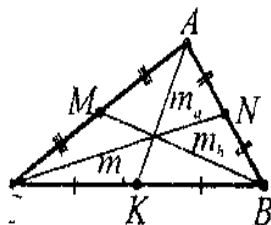
NK — середня лінія трикутника ABC .

Середня лінія трикутника паралельна до однієї з його сторін і дорівнює половині цієї сторони. Наприклад, $MN = \frac{1}{2} AC$, $MN \parallel AC$.

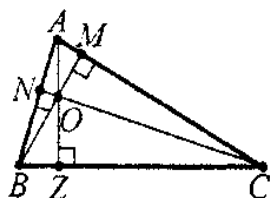


6. Визначні точки.

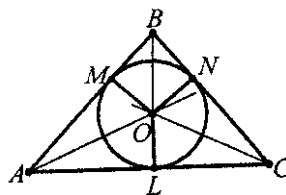
Точка перетину медіан (центр мас)



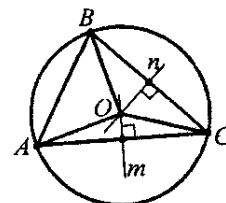
Точка перетину висот або їх продовжень (ортоцентр)



Точка перетину бісектрис (інцентр) — центр вписаного кола



Точка перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника — центр описаного кола.



Радіуси вписаного й описаного кіл: $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{2S}{a+b+c}$.

Це потрібно вміти!

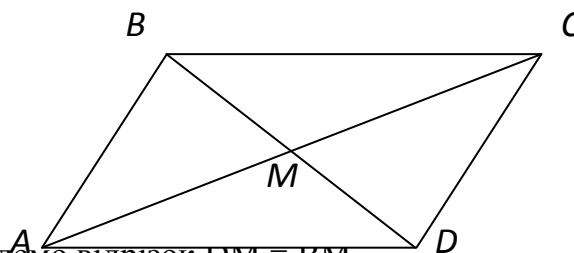
Приклад 1. Знайти площу трикутника, якщо дві його сторони відповідно дорівнюють 27 см і 29 см, а медіана, проведена до третьої сторони, дорівнює 26 см.

■ Нехай AB і BC сторони даного трикутника,

які відповідно дорівнюють 27 см і 29 см і

його медіана BM , проведена до сторони AC ,

яка дорівнює 26 см. На продовженні BM відкладемо відрізок $DM = BM$.



З рівності трикутників ABM і CDM (за двома сторонами і кутом між ними) слідує $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCD}$. У трикутнику BCD відомо, що $BC = 29$ см,

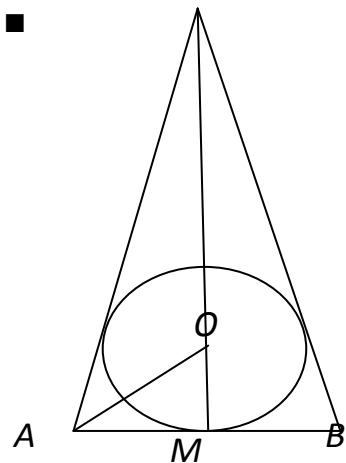
$BD = 2BM = 52$ см, $DC = AB = 27$ см.

За формулою Герона знайдемо $S_{\triangle BCD} = \sqrt{54(54 - 52)(54 - 29)(54 - 27)}$

$S_{\triangle BCD} = \sqrt{54 \cdot 2 \cdot 25 \cdot 27} = 27 \cdot 2 \cdot 5 = 270 \text{ см}^2$.

Відповідь: 270 см^2 . ■

Приклад 2. У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до основи, дорівнює 20 см, а основа відноситься до бічної сторони як 4 : 3. Знайти радіус вписаного у даний трикутник кола.



Нехай $CM = 20 \text{ см}$ є висотою даного трикутника,

$AC = BC$, точка O – центр вписаного кола, тоді

OM – радіус цього кола. Так як AO – бісектриса

Кута CAB , то $\frac{OM}{OC} = \frac{AM}{AC}$ і так як $\frac{AM}{AC} = \frac{2}{3}$, то

$$OM = \frac{2}{5} CM = 8 \text{ см.}$$

Відповідь: 8 см. ■

Приклад 3. Нехай точка O – центр кола, описаного навколо трикутника ABC , причому $\angle AOC = 60^\circ$. Знайти $\angle AMC$, якщо точка M – центр кола, вписаного в трикутник ABC .

■ Якщо точки O і B лежать по різні сторони від прямої AC , то градусна міра дуги, яка не містить точки B , дорівнює $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$. Тому

$\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 300^\circ = 150^\circ$. сума кутів при вершинах A і C трикутника ABC дорівнює $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$. Але так як AM і CM – бісектриси трикутника ABC , то сума кутів при вершинах A і C трикутника AMC дорівнює 15° .

Отже $\angle AMC = 180^\circ - 15^\circ = 165^\circ$.

Якщо ж точки O і B лежать по один бік від прямої AC , то аналогічними міркуваннями отримаємо, що $\angle AMC = 105^\circ$.

Відповідь: 165° або 105° .

Спробуй виконати сам!

1. Величини кутів трикутника ABC при вершинах A , B , і C відносяться як 5 : 6 : 7. Знайти в градусах величину кута між висотою CD і бісектрисою кута A трикутника.
Відповідь: 65° .
2. Периметр трикутника дорівнює 50 см, а його бісектриса ділить протилежну сторону на відрізки 15 см і 5 см. Знайти меншу сторону трикутника.
Відповідь: 7,5 см.
3. Сторони трикутника відносяться як 3 : 5 : 7, а його периметр дорівнює 60 см. Знайти периметр і сторони трикутника, вершинами якого є середини сторін даного трикутника.
Відповідь: 6 см, 10 см, 14 см і периметр – 30 см.
4. На сторонах кута $\angle ABC = 120^\circ$ відкладено рівні відрізки

$AB = BC = 4$ см. Через точки A, B, C проведено коло. Знайти його радіус.

Відповідь: 4 см.

5. У трикутнику ABC медіана BM у 2 рази менша від сторони AB і утворює з нею кут 40° . Знайти $\angle ABC$.

Відповідь: 110° .