

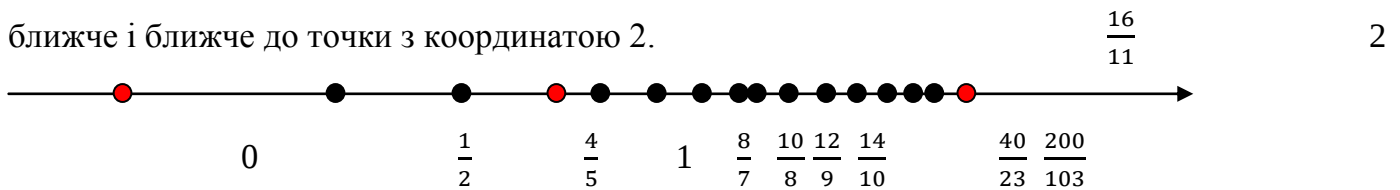
Границя числової послідовності. Метод математичної індукції.

Це потрібно знати!

Розглянемо послідовність (a_n) , задану формулою n -го члена $a_n = \frac{1}{n}$. Випишемо кілька перших членів цієї послідовності: $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{8}; \dots$. Можна помітити, що зі збільшення номера n члени послідовності **прямують** до числа 0.

Розглянемо іншу послідовність (a_n) , задану формулою n -го члена $a_n = \frac{2n}{n+3}$. Випишемо аналогічно кілька перших членів цієї послідовності: $\frac{2}{4}; \frac{4}{5}; 1; \frac{8}{7}; \frac{10}{8}; \frac{12}{9}; \frac{14}{10}; \frac{16}{11}; \dots; \frac{40}{23}; \dots; \frac{200}{103}; \dots$.

Як бачимо, що дана послідовність вже прямує до числа 2. Якщо члени цієї послідовності зображати на координатній прямій, то ці точки будуть розміщуватись все ближче і ближче до точки з координатою 2.



Інакше кажучи, різниця $|a_n - 2|$ зі збільшенням номера n стає все меншою і меншою. Наприклад, $|a_n - 2| < 0,1$ при $n \geq 57$, $|a_n - 2| < 0,01$ при $n \geq 570$, $|a_n - 2| < 0,001$ при $n \geq 5700$ і т.д. Узагалі, починаючи з деякого номера n різниця $|a_n - 2|$ стає меншою від будь-якого наперед заданого додатного числа.

У цьому разі говорять, що число 2 є границею числової послідовності a_n , і записують $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ або $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+3} = 2$.

Число A називають границею числової послідовності (a_n) , якщо починаючи з деякого номера n різниця $|a_n - A|$ стає меншою від будь-якого наперед заданого додатного числа ε .

Послідовність, яка має границю називають **збіжною**.

На основі цього доведемо, що сума нескінченної геометричної прогресії обчислюється по формулі: $S_n = \frac{b_1}{q-1}$ де знаменник прогресії $|q| < 1$.

Сума n перших членів геометричної прогресії за формулою $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$.

Виконаємо перетворення: $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1 - b_1q^n}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1q^n}{1-q}$, якщо $|q| < 1$, то при

необмеженому збільшенні n вираз q^n прямує до нуля, при цьому вираз $\frac{b_1q^n}{1-q}$ теж прямує

до нуля. Іншими словами: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1q^n}{1-q} = 0$. Отже число $\frac{b_1}{q-1}$ і буде вважатися сумою

нескінченної геометричної прогресії, у якої $|q| < 1$.

Приклад 1. Подайте нескінченний десятковий дріб 0,(45) у вигляді звичайного дробу.

Розв'язання. $0,(45) = 0,45 + 0,0045 + 0,000045 + \dots$. Доданки $0,45$; $0,0045$; $0,000045$ є членами нескінченної геометричної прогресії (b_n) , у якій $b_1 = 0,45$; $q = 0,01$. Оскільки $|q| < 1$. То можемо знайти суму цієї прогресії:

$$S = \frac{0,45}{1-0,01} = \frac{0,45}{0,99} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}.$$

Відповідь: $\frac{5}{11}$.

Приклад 2. Подайте нескінченний десятковий дріб $0,2(54)$ у вигляді звичайного дробу.

Розв'язання. Маємо: $0,2(54) = 0,2 + 0,054 + 0,00054 + 0,0000054 + \dots$. нескінченний десятковий дріб можна розглядати як суму нескінченної геометричної прогресії, перший член якої $b_1 = 0,054$. А знаменник $q = 0,01$. Тоді $0,0545454\dots = \frac{0,054}{1-0,01} = \frac{0,054}{0,99} = \frac{3}{55}$.

$$\text{Звідси } 0,2(54) = 0,2 + \frac{3}{55} = \frac{1}{5} + \frac{3}{55} = \frac{14}{55}.$$

Відповідь: $\frac{14}{55}$.

Приклад 3. Дано правильний трикутник зі стороною a . З медіан цього трикутника побудовано другий правильний трикутник, з медіан другого побудовано третій правильний трикутник і т.д. Знайдіть суму периметрів і суму площ усіх трикутників.

Розв'язання. Медіана правильного трикутника зі стороною a дорівнює $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, медіана наступного правильного трикутника зі стороною $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ дорівнює $\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}$ і т. д. Тоді периметри даних трикутників утворюють послідовність $3a; \frac{3a\sqrt{3}}{2}, \frac{9a}{4} \dots$, що є геометричною прогресією зі знаменником $\frac{\sqrt{3}}{2}$ який менший за 1. Отже сума периметрів

$$S = \frac{3a}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6a}{2-\sqrt{3}} = \frac{6a(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 6a(2+\sqrt{3}).$$

Площа правильного трикутника зі стороною a дорівнює $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, площа правильного трикутника зі стороною $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ дорівнює $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$; площа правильного трикутника зі стороною $\frac{3a}{4}$ дорівнює $\left(\frac{3a}{4}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$ і т.д. Отже, площі даних трикутників утворюють геометричне прогресію з першим членом $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ і знаменником $\frac{3}{4}$. тоді сума площ дорівнює $S = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{3}{4}} = a^2\sqrt{3}$.

Відповідь: $6a(2+\sqrt{3}); a^2\sqrt{3}$.

Метод математичної індукції

В основі математичних тверджень лежать дедуктивний та індуктивний методи. Метод міркувань, коли вихідним твердженням є загальний висновок, а заключним твердженням – частковий висновок, називається дедуктивним (або дедукцією). Метод міркувань, коли

дістають загальні висновки, ґрунтуючись на ряді часткових тверджень, називають індуктивним (або індукцією від лат. *inductio* – наведення). Розглянемо два приклади:

1) Суму n перших непарних натуральних чисел. Маємо:

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1+3 = 4;$$

$$S_3 = 1+3+5 = 9;$$

$$S_4 = 1+3+5+7 = 16;$$

$$S_5 = 1+3+5+7+9 = 25.$$

Числа 1, 4, 9, 16, 25 є квадратами послідовних натуральних чисел. З цього можна зробити припущення: для будь-якого натурального n $S_n = 1+3+5+ \dots + (2n-1) = n^2$.

2) розглянемо значення многочлена $f(n) = n^2 - n + 41$ при значеннях n , які дорівнюють 1, 2, 3, 4, 5. Маємо:

$$f(1) = 41 - \text{просте число};$$

$$f(2) = 43 - \text{просте число};$$

$$f(3) = 47 - \text{просте число};$$

$$f(4) = 53 - \text{просте число};$$

$$f(5) = 61 - \text{просте число}.$$

Припущення : для будь-якого натурального n значення виразу $f(n)$ є простим числом.

У першому та другому прикладах наведені припущення є лише гіпотезами, які належить або довести, або спростувати.

Спростувати гіпотезу другого прикладу можна за допомогою контрприкладу .

Його легко знайти: це знайти значення $f(41)$. Маємо $f(41) = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$, а це вже складене число.

Для першого прикладу ряд можна продовжувати . але ж неможливо перевірити всі числа. Ось тут і застосовується метод математичної індукції, як спосіб доведення математичних тверджень, залежних від натурального параметра n . В загальному вигляді його можна описати так.

Нехай потрібно довести, що деяке твердження є правильним для будь-якого значення n .

Доведення цього факту методом математичної індукції складається з двох частин (теорем):

1) доводять (перевіряють) справедливість твердження для $n = 1$. Це так звана **база індукції**;

2) роблять припущення, що твердження є правильним для $n = k$, і на підставі цього доводять, що воно є правильним для $n = k + 1$. Цю теорему називають **індуктивним переходом**.

На основі цих теорем доведемо, що $S_n = 1+3+5+ \dots + (2n-1) = n^2$.

1) Перевіримо справедливість твердження для $n = 1$: $S_1 = 1$. Правильно. Отже переходимо до наступного кроку.

2) Припускаємо правильність твердження при $n = k$, тоді $S_k = 1+3+5+ \dots + (2k-1) = k^2$. Тепер доведемо, що дане твердження буде справедливим і для наступного числа, тобто $n = k + 1$. $S_{k+1} = 1+3+5+ \dots + (2k-1) + \underbrace{(2(k+1)-1)}_{S_k} = S_k + (2k+1) =$

$$= k^2 + 2k+1 = (k+1)^2, \quad \text{що і потрібно було довести.}$$

Приклад 2. Виведіть формулу для обчислення значення суми

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{7}{3 \cdot 5} + \frac{17}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{2n^2-1}{(2n-1)(2n+1)}, \text{ де } n \in N.$$

Розв'язання. Для $n = 1$: $S_1 = \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}$.

Для $n = 2$: $S_2 = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{7}{3 \cdot 5} = \frac{4}{5}$.

Для $n = 3$: $S_3 = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{7}{3 \cdot 5} + \frac{17}{5 \cdot 7} = \frac{9}{7}$.

Для $n = 4$: $S_4 = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{7}{3 \cdot 5} + \frac{17}{5 \cdot 7} + \frac{31}{7 \cdot 9} = \frac{16}{9}$.

Бачимо, що тепер можна зробити таке припущення: $S_n = \frac{n^2}{2n+1}. \quad (2)$

Доведемо цю гіпотезу методом математичної індукції.

Вище ми перевірили справедливість формули (2) для $n = 1$, тим самим довели теорему “база індукції”.

Тепер доведемо теорему “індуктивний перехід”.

Нехай формула (2) є правильною при $n = k$, тобто $S_k = \frac{k^2}{2k+1}$. Маємо :

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \underbrace{\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{7}{3 \cdot 5} + \frac{17}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{2}{(2k-1)(2k+1)}}_{S_k} + \frac{2(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} = S_k + \frac{2(k+1)^2-1}{(2k+1)(2k+3)} = \\ &= \frac{k^2}{2k+1} + \frac{2k^2+4k+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^3+5k^2+4k+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^3+2k^2+3k^2+3k+k+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^2(k+1)+3k(k+1)+k+1}{(2k+1)(2k+3)} = \\ &= \frac{(k+1)(2k^2+3k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)^2}{(2k+3)}. \end{aligned}$$

Отже, припустивши, що формула (2) є правильною при $n = k$, ми довели, що вона є правильною і для $n = k+1$. А з урахуванням теореми “база індукції” можна зробити висновок, що гіпотеза є правильною.

Приклад 3. Доведіть, що для будь-якого $n \in N$ і $n > 4$ виконується нерівність $2^n > n^2$.

Розв'язання. При $n = 5$ маємо правильну нерівність $2^5 > 5^2$. Нехай $2^k > k^2$, $k \in N$,

$k > 4$. Маємо: $2 \cdot 2^k > 2k^2$; $2^{k+1} > 2k^2$. Легко показати (можете переконатись в цьому самостійно), що при $k > 1 + \sqrt{2}$, а тим більше при $k > 4$, виконується нерівність $2k^2 > (k + 1)^2$. Звідси $2^{k+1} > (k + 1)^2$.

Ми показали, що при $n = 5$ виконується теорема “база індукції”, і довели теорему “індуктивний перехід”. Отже, нерівність, що розглядається, є правильною при будь-яких натуральних n таких, що $n > 4$.

Приклад 4. Доведіть, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ значення виразу $5^n - 3^n + 2n$ кратне 4.

Розв’язання. При $n = 1$ отримуємо $5^1 - 3^1 + 2 \cdot 1 = 4 : 4$, тобто теорему “база індукції” доведено.

Нехай при $n = k$ є правильним твердженням $(5^k - 3^k + 2k) : 4$.

Доведемо, що тоді це твердження є правильним при $n = k+1$, тобто

$$(5^{k+1} - 3^{k+1} + 2(k + 1)) : 4.$$

Для доведення достатньо показати, що різниця $(5^k - 3^k + 2k) - (5^{k+1} - 3^{k+1} + 2(k + 1))$ кратна 4. Перепишемо цю різницю у такому вигляді:

$5^k(5 - 1) - 3^k(3 - 1) + 2 = 4 \cdot 5^k - 2(3^k - 1)$. Оскільки $(3^k - 1) : 2$, то значення отриманого виразу кратне 4. Отже, твердження, що доводиться, є правильним, у чому ми переконалися за допомогою методу математичної індукції.

