

Геометрична прогресія

Це потрібно знати!

Геометричною прогресією називають послідовність, перший член якої відмінний від нуля, а інші утворюються множенням попереднього члена на одне й те ж число, відмінне від нуля. Це число називають **знаменником геометричної прогресії** і позначають **q** . Наприклад, послідовність (b_n) : 1; 3; 9; 27;... є геометричною прогресією, перший член якої дорівнює $b_1 = 1$, а знаменник — $q = 3$.

Якщо (b_n) геометрична прогресія, то:

- $b_{n+1} = b_n \cdot q$, $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$ — рекурентна формула геометричної прогресії;
- $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ — знаменник геометричної прогресії;
- $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ — формула n -го члена геометричної прогресії;
- $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, $n \geq 2$ — квадрат кожного члена геометричної прогресії, крім першого й останнього, якщо вона скінченна, є добутком сусідніх з ним членів;
- $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$ або $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$ — формули суми n перших членів геометричної прогресії, у якої $q \neq 1$. **Якщо $q = 1$, то $S_n = b_1 n$;**
- $S = \frac{b_1}{1 - q}$ — сума нескінченної геометричної прогресії, якщо $|q| < 1$.

Це потрібно вміти!

Приклад 1. Записати для геометричної прогресії (b_n) : -8; 4; -2; 1;... формулу n -го члена та знайти її десятий член, суму перших десяти членів і суму всіх її членів.

■ Оскільки $b_1 = -8$, а $b_2 = 4$, то $q = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$. Формула n -го члена даної геометричної прогресії:

$$b_n = -8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -8 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\left(-\frac{1}{2}\right)^1} = 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Модуль знаменника даної геометричної прогресії менший від одиниці, тому сума всіх її

членів дорівнює $S = \frac{-8}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-8}{\frac{3}{2}} = -\frac{16}{3} = -5\frac{1}{3}$. ■

Приклад 2. Знайти суму п'яти членів послідовності, заданої формулою $y_n = \frac{1}{16} \cdot 4^{n+1}$

■ $y_1 = \frac{1}{16} \cdot 4^{1+1} = 1$; $y_2 = \frac{1}{16} \cdot 4^{2+1} = 4$; $y_3 = 16$; $y_4 = 64$; $y_5 = 256$.

$S_5 = 1 + 4 + 16 + 64 + 256 = 341$.

Відповідь. 341. ■

Приклад 3. Записати число 3,(12) у вигляді звичайного дробу.

■ Число 3,(12) = 3,1212... запишемо у вигляді такої суми:

3,(12) = 3 + 0,12 + 0,0012 + 0,000012 + ...

Доданки 0,12; 0,0012; 0,000012; ... — члени нескінченної геометричної прогресії з першим членом 0,12 і знаменником

$$q = \frac{0,0012}{0,12} = \frac{0,12}{12} = 0,01 \quad (|q| < 1).$$

Отже, сума цієї прогресії

$$S = \frac{0,12}{1-0,01} = \frac{0,12}{0,99} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}.$$

$$\text{Тому } 3,(12) = 3 + \frac{4}{38} = 3\frac{4}{33}.$$

Відповідь. $3\frac{4}{33}$. ■

Приклад 4. Знайти перший член і знаменник геометричної прогресії у якій

$$b_5 - b_1 = 15; \quad b_4 - b_2 = 6.$$

$$\begin{cases} b_1 q^4 - b_1 = 15, & b_1(q^4 - 1) = 15, & b_1(q^2 - 1)(q^2 + 1) = 15, \\ b_1 q^3 - b_1 q = 6; & b_1 q(q^2 - 1) = 6; & b_1 q(q^2 - 1) = 6. \end{cases}$$

Поділимо перше рівняння системи на друге:

$$\frac{q^2 + 1}{q} = \frac{15}{6}; \quad \frac{q^2 + 1}{q} = \frac{5}{2}; \quad \begin{cases} 2(q^2 + 1) = 5q; \\ q \neq 0; \end{cases}$$

$$2q^2 - 5q + 2 = 0; \quad D = 25 - 16 = 9; \quad q_1 = \frac{5+3}{4} = 2; \quad q_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Якщо } q = 2, \text{ то } b_1 = \frac{6}{q^3 - q} = \frac{6}{6} = 1.$$

$$\text{Якщо } q = \frac{1}{2}, \text{ то } b_1 = \frac{6}{\frac{1}{8} - \frac{1}{2}} = \frac{6}{-\frac{3}{8}} = -\frac{48}{3} = -16.$$

Відповідь. $b_1 = 1; \quad q = 2; \quad b_1 = -16; \quad q = \frac{1}{2}$. ■

Приклад 5. Число членів геометричної прогресії парне. Сума її членів, що стоять на парних місцях, удвічі більша суми членів, що ять на непарних місцях. Знайти знаменник цієї прогресії.

$$\frac{b_2 + b_4 + b_6 \dots + b_{2n}}{b_1 + b_3 + b_5 \dots + b_{2n-1}} = 2;$$

$$\frac{b_1 q + b_3 q + b_5 q + \dots + b_{2n-1} q}{b_1 + b_3 + b_5 + \dots + b_{2n-1}} = 2;$$

$$\frac{q(b_1 + b_3 + b_5 + \dots + b_{2n-1})}{b_1 + b_3 + b_5 + \dots + b_{2n-1}} = 2; \quad q = 2.$$

Відповідь. 2. ■