

Арифметична прогресія

Це потрібно знати!

Арифметичною прогресією називають послідовність, кожен член якої, починаючи з другого, утворюється додаванням до попереднього члена одного і того ж числа. Це число називають **різницею арифметичної прогресії** і позначають d . Наприклад, послідовність (a_n) : -8; -1; 6; 13;... є арифметичною прогресією, перший член якої дорівнює $a_1 = -8$, а різниця — $d = 7$.

Якщо (a_n) — арифметична прогресія, то:

- $a_{n+1} = a_n + d$ — рекурентна формула арифметичної прогресії;
- $d = a_{n+1} - a_n$ — різниця арифметичної прогресії;
- $a_n = a_1 + d(n-1)$ — формула n -го члена арифметичної прогресії;
- $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $n \geq 2$ — кожен член арифметичної прогресії, крім першого й останнього, якщо вона скінченна, є середнім арифметичним сусідніх з ним членів;
- $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ або $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ — формули суми n перших членів арифметичної прогресії.

Це потрібно вміти!

Приклад 1. Записати для арифметичної прогресії (a_n) : -38; -34; -30; ... формулу n -го члена та знайти суму шести її послідовних членів, починаючи з восьмого.

■ Оскільки $a_1 = -38$, а $a_2 = -34$, то $d = a_2 - a_1 = -34 - (-38) = 4$. Формула n -го члена арифметичної прогресії (a_n) : $a_n = -38 + 4(n-1) = 4n - 42$. Шукана сума шести членів є різницею суми перших тринадцяти та перших семи членів заданої прогресії: $S = S_{13} - S_7$.

$$S = \frac{2a_1 + d(13-1)}{2} \cdot 13 - \frac{2a_1 + d(7-1)}{2} \cdot 7 = \frac{(2a_1 + 12d) \cdot 13 - (2a_1 + 6d) \cdot 7}{2} + \frac{26a_1 + 15d - 14a_1 - 42d}{2} = \frac{12a_1 + 114d}{2} =$$
$$= 6a_1 + 57d = 6 \cdot (-38) + 57 \cdot 4 = -228 + 228 = 0. \blacksquare$$

Приклад 2. В арифметичній прогресії $a_1 = 5$; $a_{100} = 203$. Знайти a_{30} .

А	Б	В	Г	Д
173	63	60	65	35

■ За умовою, $a_1 = 5$, $a_{100} = 203$. Для сотого члена прогресії маємо:

$$203 = 5 + 99d; 99d = 198; d = 2.$$

$$\text{Обчислимо } a_{30}: a_{30} = a_1 + (30-1)d = 5 + 29 \cdot 2 = 63.$$

Відповідь. Б. ■

Приклад 3. Розв'язати рівняння $1 + 4 + 7 + \dots + x = 117$.

■ Розглянемо арифметичну прогресію 1; 4; 7; ...; x .

$$d = 3; a_n = x; a_1 = 1.$$

$$x = 1 + 3(n-1); x = 1 + 3n-3; 3n = x-1 + 3;$$

$$n = \frac{x+2}{3}.$$
$$3n = x + 2;$$

За формулою суми n перших членів арифметичної прогресії маємо:

$$117 = \frac{1+x}{2} \cdot \frac{x+2}{3}; (1+x)(x+2) = 702;$$

$$x^2 + 3x + 2 - 702 = 0;$$

$$x^2 + 3x - 700 = 0;$$

$$D = 9 + 2800 = 2809.$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{2809} = 53.$$

$$x_1 = \frac{-3+53}{2} = \frac{50}{2} = 25;$$

$$x_2 = \frac{-3-53}{2} = -\frac{56}{2} = -28 \text{ (не є коренем рівняння)}$$

Відповідь. 25. ■

Приклад 4. Знайти арифметичну прогресію у якій сума трьох перших членів дорівнює 27, а сума квадратів цих же трьох членів дорівнює 275.

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 27; \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 275; \end{cases}$$

Крім цього,

$$\frac{a_1 + a_3}{2} \cdot 3 = 27; \quad \frac{a_1 + a_3}{2} = 9; \quad a_1 + a_3 = 18;$$

Оскільки $a_1 + a_2 + a_3 = 27$, то $18 + a_2 = 27$; $a_2 = 27 - 18$; $a_2 = 9$.

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 18; \\ a_1^2 + a_3^2 + 81 = 275; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + a_3 = 18; \\ a_1^2 + a_3^2 = 194; \end{cases} \quad (a_1 + a_3)^2 = 324;$$

$$a_1^2 + 2a_1 \cdot a_3 + a_3^2 = 324;$$

$$194 + 2a_1 \cdot a_3 = 324;$$

$$2a_1 \cdot a_3 = 324 - 194;$$

$$2a_1 \cdot a_3 = 130;$$

$$a_1 \cdot a_3 = 130 : 2;$$

$$a_1 \cdot a_3 = 65;$$

$$\begin{cases} a_1 \cdot a_3 = 65; \\ a_1 + a_3 = 18. \end{cases}$$

Звідси $a_1 = 5$; $a_3 = 13$, або $a_1 = 13$; $a_3 = 5$.

Відповідь. 5; 9; 13; ...; 13; 9; 5... ■

Приклад 5. Знайти суму натуральних чисел, кратних 7 і не більших 145.

$$\blacksquare 7n \leq 145; \quad n \leq \frac{145}{7} = 20\frac{5}{7}.$$

Отже, $a_1 = 7 \cdot 1 = 7$; $n = 20$; $a_{20} = 7 \cdot 20 = 140$;

$$S_{20} = \frac{7+140}{2} \cdot 20 = 147 \cdot 10 = 1470.$$

Відповідь. 1470. ■

Приклад 6. Сума трьох чисел, які утворюють арифметичну прогресію, дорівнює 15. Якщо до цих чисел додати відповідно 1, 4 і 19, то одержимо три числа, які утворюють геометричну прогресію. Знайти ці числа.

■ Нехай a_1 ; $a_1 + d$; $a_1 + 2d$ — три числа, які утворюють арифметичну прогресію

$$a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 15;$$

$$3a_1 + 3d = 15; \quad 3(a_1 + d) = 15; \quad a_1 + d = 5.$$

Числа a_1+1 ; a_1+d+4 і $a_1+2d+19$ утворюють геометричну прогресію, тобто

$$\frac{a_1+d+4}{a_1+1} = \frac{a_1+2d+19}{a_1+d+4};$$

$$\begin{cases}
a_1 + d = 5, \\
(a_1 + 1)(a_1 + 2d + 19) = (a_1 + d + 4)^2; \\
a_1 = 5 - d, \\
a_1^2 + 2a_1d + 19a_1 + a_1 + 2d + 19 = a_1^2 + d^2 + 16 + 2a_1d + 8a_1 + 8d; \\
a_1 = 5 - d, \\
d^2 + 6d - 12a_1 - 3 = 0; \\
d^2 + 6d - 12(5 - d) - 3 = 0; \quad d^2 + 18d - 63 = 0; \quad d_1 = -21; \quad d_2 = 3; \\
a_1 = 5 - (-21) = 5 + 21 = 26; \\
a_1 = 5 - 3 = 2.
\end{cases}$$

Відповідь. 26; 5; -16 або 2; 5; 8. ■