

Урок № 5. Нерівності та системи нерівностей з модулем

Цілі: домогтися засвоєння учнями схем розв'язування різноманітних видів нерівностей з модулем.

Завдання: сформулювати вміння розв'язувати нерівності та системи нерівностей з модулями за допомогою геометричної інтерпретації модуля і за означенням модуля

I. Нерівності з модулем

$$1. \quad |f(x)| \geq g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x). \end{cases}$$

Приклад:

$$a) \quad |x - 4| > 3 \Rightarrow \begin{cases} x - 4 > 3, \\ x - 4 < -3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 7, \\ x < 1. \end{cases}$$

Відповідь: $x \in (-\infty; 1) \cup (7; +\infty)$.

$$б) \quad |3x - 5| \geq 9x + 1 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 5 \geq 9x + 1, \\ 3x - 5 \leq -9x - 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -1, \\ x \leq -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Відповідь: $x \in [-\infty; -1]$.

$$2. \quad |f(x)| \leq g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -g(x). \end{cases}$$

Приклад:

$$a) \quad |3x - 2| \leq 7 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2 \leq 7, \\ 3x - 2 \geq -7; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 3, \\ x \geq -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Відповідь: $x \in [-\frac{5}{3}; 3]$.

$$б) \quad |4 - 3x| < 2x \Rightarrow \begin{cases} 4 - 3x < 2x, \\ 4 - 3x > -2x; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0,8 \\ x < 4. \end{cases}$$

Відповідь: $x \in (0,8; 4)$.

$$3. \quad |f(x)| < |g(x)| \text{ або } |f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x) \text{ або } f^2(x) > g^2(x)$$

Приклад: $|x - 3| > |x + 2|$
 $(x - 3)^2 > (x + 2)^2; (x - 3)^2 - (x + 2)^2 > 0; -5(2x - 1) > 0; 2x - 1 < 0;$
 $x < \frac{1}{2}.$

Відповідь: $x \in (-\infty; \frac{1}{2})$

4. Нерівності, які мають суму декількох модулів і число або $f(x)$.

Схема розв'язувань:

- 1) знайти нулі модулів;
- 2) розбити координатну пряму нулями на проміжки;
- 3) визначити знак кожного під модульного виразу на кожному проміжку, взявши з цього проміжку число і підставивши в кожний під модульний вираз;
- 4) розв'язати кожну нерівність залежно від знаку на кожному проміжку;
- 5) відповіддю є об'єднання розв'язків на кожному проміжку.

Приклад:

$$|x + 2| + |x - 3| > x + 5$$

Розв'язання:

Знаходимо нулі модулів: $x + 2 = 0$ і $x - 3 = 0$

$$x = -2 \quad \text{і} \quad x = 3.$$

Розбиваємо координатну пряму на проміжки і визначаємо знак кожного під модульного виразу на кожному проміжку:

I: $(-\infty; -2)$, $x + 2 < 0$, $x - 3 < 0$;

II: $(-2; 3)$, $x + 2 > 0$, $x - 3 < 0$;

III: $(3; +\infty)$, $x + 2 > 0$, $x - 3 > 0$.

Розв'язуємо нерівність на кожному проміжку:

I: $(-\infty; -2)$;

$-x - 2 - x + 3 > x + 5$, $-3x > 4$, $x < -\frac{4}{3}$. Отже $x \in (-\infty; -\frac{4}{3})$. Знайдемо переріз

проміжків $(-\infty; -2)$ і $(-\infty; -\frac{4}{3})$: $x \in (-\infty; -2)$.

II: $(-2; 3)$;

$x + 2 - x + 3 > x + 5$, $x < 0$. Отже $x \in (-\infty; 0)$. Знайдемо переріз проміжків $(-2; 3)$ і $(-\infty; 0)$: $x \in (-2; 0)$.

III: $(3; +\infty)$;

$x + 2 + x - 3 > x + 5$, $x > 6$. Отже $x \in (6; +\infty)$. Знайдемо переріз проміжків $(3; +\infty)$ і $(6; +\infty)$: $x \in (6; +\infty)$.

Розв'язки отримані на кожному інтервалі об'єднуємо і записуємо відповідь.

Відповідь: $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (6; +\infty)$.

II. Системи нерівностей з модулем

Приклад.

Розв'язати систему

$$\begin{cases} |2x - 3| \leq 3, \\ \frac{1}{x} < 1. \end{cases}$$

Розв'язання: розв'яжемо окремо кожну нерівність.

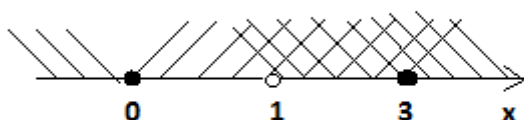
$$|2x - 3| \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3 \leq 3, \\ 2x - 3 \geq -3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 3, \\ x \geq 0, \end{cases} \Rightarrow x \in [0; 3]$$

$$2x - 3 \geq -3; \quad x \geq 0$$

$$\frac{1-x}{x} < 0; \quad x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$$



Знайдемо перетин розв'язків цих нерівностей



Відповідь: $x \in (1; 3]$.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати нерівності:

1) $|2x - 1| \leq 5$; 2) $|5 - x| > \frac{1}{2}$; 3) $|x - 2| < 2x - 10$; 4) $|2x - 1| \geq x - 1$;

5) $x^2 - x - 2 < |5x - 3|$; 6) $|2x + 3| > |x| - 4x - 1$; 7) $\frac{|x+3|+x}{x+2} > 1$;

8) $\frac{x^2 - |x| - 12}{x - 3} \geq 2x$.

Розв'язати системи нерівностей:

1) $\begin{cases} |x| \geq x, \\ 2x - 1 > 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |2x + 5| \geq |7 - 4x|, \\ |x| < 2|x - 4| + x - 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} |x| \leq -x, \\ |x + 2| > 1. \end{cases}$