

Урок 3. Метод інтервалів для розв'язування раціональних нерівностей.

Цілі: домогтися засвоєння учнями схеми розв'язування раціональних нерівностей з однією змінною методом інтервалів.

Завдання: виробити вміння виконувати дії відповідно до схеми розв'язування раціональних нерівностей методом інтервалів.

Схема розв'язування нерівностей $f(x) > 0$; $f(x) < 0$ методом інтервалів:

- 1) знайти область визначення функції $f(x) \neq 0$ ($D(f)$);
- 2) знайти нулі функції $f(x) = 0$;
- 3) на числовій прямій в $D(f)$ нанести нулі функції;
- 4) дослідити знак $y = f(x)$ у кожному з отриманих інтервалів;
- 5) записати відповідь.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $(2x - 1)(x + 2)(x - 1) < 0$.

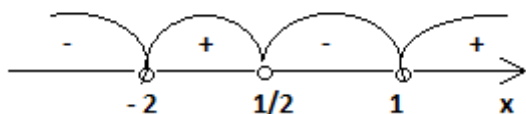
Розв'язання.

Розглянемо функцію $y = (2x - 1)(x + 2)(x - 1)$, $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

Знайдемо нулі функції: $(2x - 1)(x + 2)(x - 1) = 0$;

$$\begin{cases} 2x - 1 = 0, \\ x + 2 = 0, \\ x - 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ x = -2, \\ x = 1. \end{cases}$$

Нанесемо на числову пряму область визначення та нулі функції.



Достатньо визначити знак функції на правому крайньому інтервалі $(1; +\infty)$:

$y(2) = (2 \cdot 2 - 1)(2 + 2)(2 - 1) > 0$. На інших інтервалах розставляємо знаки з права на ліво у порядку чергування знаків.

Отже $y < 0$, якщо $x \in (-\infty; -2) \cup (\frac{1}{2}; 1)$.

Відповідь: $x \in (-\infty; -2) \cup (\frac{1}{2}; 1)$.

Виключення: якщо кількість будь-якого нуля функції парна то знак функції в околі цієї точки не змінюється; якщо нуль функції під знаком модуля то знак функції в околі цієї точки не змінюється.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\frac{(x-1)^3(x+2)^4|x-5|}{(2x+1)(x-4)^2} \leq 0$.

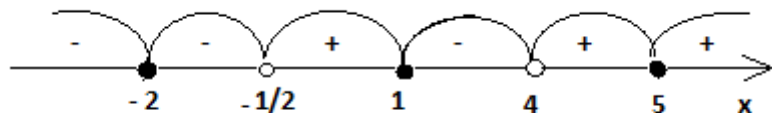
Знайдемо область визначення функції $y = \frac{(x-1)^3(x+2)^4|x-5|}{(2x+1)(x-4)^2}$:

$(2x + 1)(x - 4) \neq 0$, отже $D(f) = (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; 4) \cup (4; +\infty)$.

Визначимо нулі функції: $(x - 1)^3(x + 2)^4|x - 5| = 0$; $x = 1$, $x = -2$, $x = 5$.

Нанесемо на числову пряму область визначення та нулі функції.

Визначимо знак на інтервалі $(5; +\infty)$: $y(6) = \frac{(6-1)^3(6+2)^4|6-5|}{(2 \cdot 6 + 1)(6-4)^2} \geq 0$, отже знак плюс. Далі відбувається чергування знаків, причому в околі точки $x = -2$ і $x = 5$ функція знак не змінює.



Отже $y \leq 0$, якщо $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -\frac{1}{2}) \cup (1; 4)$.

Відповідь: $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -\frac{1}{2}) \cup (1; 4)$.

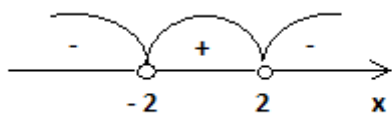
Приклад 3. Розв'язати нерівність $\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1$.

Розв'язання: $\frac{2+x+10-5x-4+x^2}{(2-x)(2+x)} < 0$; $\frac{x^2-4x+8}{(2-x)(2+x)} < 0$.

$D(f)$: $(2-x)(2+x) \neq 0$, отже $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

Нулі функції: $x^2 - 4x + 8 = 0$; $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -16 < 0$, отже нулів немає.

Нанесемо на числову пряму область визначення. Визначимо знак функції на інтервалі $(2; +\infty)$: $y(3) = \frac{3^2 - 4 \cdot 3 + 8}{(2-3)(2+3)} < 0$, отже знак мінус. Далі відбувається чергування знаків.



Отже $y < 0$, якщо $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Відповідь: $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

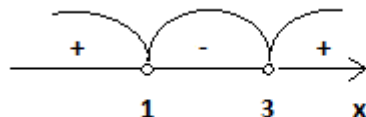
Приклад 4. Розв'язати нерівність $\frac{x^2 - 6x + 8}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}} \geq 0$.

Розв'язання:

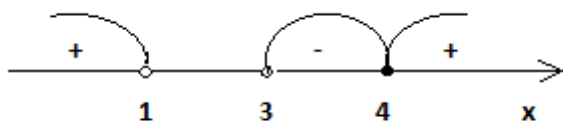
$D(f)$: $x^2 - 4x + 3 > 0$; $x_{1,2} = 1; 3$;

$D(f) = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

Нулі функції: $x^2 - 6x + 8 = 0$; $x_{1,2} = 2; 4$



Нанесемо на числову пряму область визначення та нулі функції. $x = 2$ не належить області визначення, тому її наносити не будемо.



Відповідь: $x \in (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати нерівності:

$$1) \frac{(2x+1)(x-3)}{(2-x)(x-5)} < 0; \quad 2) \frac{x^3(x-1)^4(x+5)}{(x-8)(1-4x)} > 0; \quad 3) \frac{x^2-5x+7}{-2x^2+3x+2} > 0;$$

$$4) \frac{x-1}{x} - \frac{x+1}{x-1} < 2; \quad 5) \frac{x^5|3x-1|(x+3)}{x-2} \leq 0; \quad 6) (x^2-1)\sqrt{x^2-4} > 0.$$