

Тема 5. Нерівності

Урок 1. Основні властивості числових нерівностей

Цілі: Домогтися засвоєння основних властивостей числових нерівностей.

Завдання: сформулювати вміння застосовувати основні властивості числових нерівностей під час розв'язування задач та доведення нерівностей; сформулювати вміння оцінювати значення виразів, застосовуючи властивості числових нерівностей.

I. Основні властивості числових нерівностей:

1. Якщо $a > b$, то $a - b > 0$, якщо $a < b$, то $a - b < 0$.
2. Якщо $a < b$, $b < c$, то $a < c$.
3. Якщо $a < b$, $a + c$ – будь-яке число, то $a + c < b + c$ (якщо до обох частин нерівності додати одне й те саме число, то отримаємо правильну нерівність).
4. Якщо $a < b$, $c > 0$, то $ac < bc$ і $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ (якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число, то отримаємо правильну нерівність).
Якщо $a < b$, $c < 0$, то $ac > bc$ і $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ (нерівність змінює знак на протилежний).
5. Якщо $b > a > 0$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
6. Якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$ (нерівності з однаковими знаками можна почленно додавати).
7. Якщо $a < b$ і $c < d$ і $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, то $ac < bd$.
8. Якщо $a < b + c$, то $a - c < b$ (доданок можна переносити з однієї частини нерівності в іншу, змінюючи знак доданка на протилежний).

Приклад. Відомо, що $a < b$. Порівняємо $2a + 3$ і $2b + 5$.

Розв'язання

$a < b$ помножимо обидві частини нерівності на 2; оскільки $2 > 0$, то за четвертою властивістю $2a < 2b$ додамо до обох частин нерівності 3, отже за третьою властивістю $2a + 3 < 2b + 3$.

Оскільки $3 < 5$ то за третьою властивістю $2b + 3 < 2b + 5$. Отже за другою властивістю

$$\left. \begin{array}{l} 2a + 3 < 2b + 3 \\ 2b + 3 < 2b + 5 \end{array} \right| \Rightarrow 2a + 3 < 2b + 5.$$

II. Застосування властивостей числових нерівностей

1. Для оцінювання значення виразу.

Приклад. Відомо, що $6 < x < 7$ і $10 < y < 12$. З'ясуйте яких значень можуть набувати наведені вирази (оцініть ці вирази):

а) $3x + 2y$; б) $y - x$; в) $5xy$; г) $\frac{y}{x}$.

Розв'язання

а) За умовою $6 < x < 7$, помножимо всі частини нерівності на 3, щоб знайти вираз $3x$ (оцінити $3x$)

$$6 \cdot 3 < 3 \cdot x < 7 \cdot 3$$

$$18 < 3x < 21$$

Оцінимо $2y$:

$$20 < 2y < 24$$

Оцінимо $3x + 2y$:

$$18 < 3x < 21$$

+

$$\underline{20 < 2y < 24}$$

$$38 < 3x + 2y < 45$$

Відповідь: $38 < 3x + 2y < 45$

б) За умовою $6 < x < 7$, помножимо всі частини нерівності на -1 (знаки нерівності зміняться на протилежні), отримаємо:

$$-7 < -x < -6$$

Оцінимо $y - x$:

$$10 < y < 12$$

+

$$\underline{-7 < -x < -6}$$

$$3 < y - x < 6$$

Відповідь: $3 < y - x < 6$

в) За умовою $6 < x < 7$, помножимо всі частини нерівності на 5:

$$30 < x < 35$$

Оцінимо $5xy$:

$$30 < x < 35$$

×

$$\underline{10 < y < 12}$$

$$300 < 5xy < 420$$

Відповідь: $300 < 5xy < 420$

г) За умовою $6 < x < 7$,

оцінимо $\frac{1}{x}$:

$$\frac{1}{7} < \frac{1}{x} < \frac{1}{6}$$

Оцінимо $\frac{y}{x}$, помноживши y на $\frac{1}{x}$: $\frac{10}{7} < \frac{y}{x} < \frac{12}{6}$, отже $\frac{10}{7} < \frac{y}{x} < 2$.

Відповідь: $\frac{10}{7} < \frac{y}{x} < 2$

2. Для доведення нерівностей:

- Метод різниці

Щоб довести, що $A > B$, досить довести, що $A - B > 0$.

Щоб довести, що $A < B$, досить довести, що $A - B < 0$.

Приклад. Довести, що $a(a - 2) > 6(a - 3)$

Розв'язання

Покажемо, що $a(a - 2) - 6(a - 3) > 0$

$a(a - 2) - 6(a - 3) = a^2 - 2a - 6a + 18 = a^2 - 8a + 18$ =(виділимо з тричлена квадрат двочлена)= $a^2 - 2 \cdot 4a + 16 + 2 = (a - 4)^2 + 2$.

$(a - 4)^2 \geq 0$ при будь-якому a , тому $(a - 4)^2 + 2 > 0$.

Оскільки $a(a - 2) - 6(a - 3) = (a - 4)^2 + 2 > 0$, то $a(a - 2) > 6(a - 3)$.

- Метод спрощення нерівності

Приклад. Довести, що $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} < 1$, де $n \in \mathbb{N}$

Розв'язання

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Нерівність, що доводиться, набуває вигляду $1 - \frac{1}{n+1} < 1$ і стає очевидною.

- Метод нерівності Коші для двох чисел.

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ для $a \geq 0$ і $b \geq 0$, або $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ - нерівність Коші

$a + \frac{1}{a} \geq 2$ (сума двох обернених чисел більше або дорівнює нулю).

Приклад.

Доведіть, що коли $a > 0$, і $b > 0$, то $(a + \frac{1}{b})(b + \frac{1}{a}) \geq 0$.

Застосовуючи нерівність Коші:

$$a + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{b}} = 2\sqrt{\frac{a}{b}}; \quad b + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a}} \quad \text{отже,}$$

$$(a + \frac{1}{b})(b + \frac{1}{a}) \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}} * 2\sqrt{\frac{b}{a}} = 4\sqrt{\frac{a}{b} * \frac{b}{a}} = 4 > 0$$

Формули середніх величин.

Середнє арифметичне - $\frac{a+b}{2}$, $a > 0, b > 0$

Середнє квадратичне - $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$

Середнє геометричне - $\sqrt{ab}$

Середнє гармонічне - $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

III. Завдання для самостійної роботи:

1. Відомі межі довжини a і ширини b прямокутника (у см):

$$5,6 < a < 5,7 \text{ і } 4,8 < b < 4,9.$$

Оцініть з точністю до десятих: а) периметр прямокутника; б) площу прямокутника.

2. Знайдіть межу значення виразу $5x - 3y$, якщо $3,13 < x < 3,14$ і $7,28 < y < 7,29$.

3. Доведіть, що при будь-якому значенні змінної, нерівності є правильними:

а) $x^2 - 12x + 38 > 0$,

б) $x^2 + 5y^2 + 2xy + 4y + 3 > 0$,

в) $(a + 2)^2 - 5 > 2(a - 6)$

4. Відомо, що $a \in [0; 1]$, $b \in [0; 1]$ і $a + b \geq \frac{1}{2}$.

Доведіть $\sqrt{(1-a)(1-b)} \leq \frac{3}{4}$.

5. Доведіть, що для $a > 0$, $b > 0$ виконується нерівність $(a^2 + b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b^2}) \geq 4\sqrt{\frac{a}{b}}$

6. Доведіть, що для $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ виконується нерівність
 $ab(a + b - 2c) + bc(b + c - 2a) + ac(a + c - 2b) \geq 0$