

Уточнений Ньютоном третій закон Кеплера

Кеплер відкрив свої закони емпіричним шляхом. Ньютон вивів закони Кеплера із закону всесвітнього тяжіння. Для визначення мас небесних тіл важливе значення має уточнений Ньютоном третій закон Кеплера.

В узагальненому вигляді цей закон має такий вигляд:

$$\frac{T^2(M+m)}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G},$$

де M – маса центрального тіла, m – маса тіла, що обертається навколо M із сидеричним періодом T на середній відстані a , G – гравітаційна стала ($6,67 \cdot 10^{-11}$ одиниць СІ).

Позначимо параметри будь-якої іншої системи двох зв'язаних тяжінням тіл через T_1 , M_1 , m_1 і a_1 , тоді згідно з попередньою формулою маємо:

$$\frac{T^2(M+m)}{T_1^2(M_1+m_1)} = \frac{a^3}{a_1^3}.$$

Бачимо, що параметри в чисельнику відносяться до однієї пари тіл (наприклад до Сонця і до Землі), а у знаменнику – до другої пари тіл (наприклад до Нептуна і до його супутника). Звідси виявляється можливим визначати маси небесних тіл по відношенню до маси Землі або до маси Сонця. Для цього порівнюють рух Місяця навколо Землі (або рух Землі навколо Сонця – у другому випадку) з рухом супутника навколо планети, масу якої визначають, і при цьому масами супутників у порівнянні з масою центрального тіла нехтують. Тоді маса планети M_n визначається за формулою:

$$M_n = \frac{T^2}{T_1^2} \cdot \frac{a_1^3}{a^3} M,$$

де T_1 і a_1 – період і відстань супутника планети. Якщо M – маса Землі, то T і a відносять до Місяця, а якщо M – маса Сонця, то T і a відносять до Землі.

Якщо періоди обертання задані у земних середніх добах, відстані – в кілометрах і маси ті – в масах Землі, то третій закон Кеплера матиме вигляд:

$$T^2(M+m) = 132,7 \cdot 10^{-16} a^3.$$

Третій закон Кеплера також можна використовувати, щоб визначати маси подвійних зір.

Необхідно зробити наступне зауваження. Для простоти часто говориться, що одне тіло обертається навколо іншого, але це справедливо тільки для випадку, коли маса першого тіла мізерно мала в порівнянні з масою другого (центру тяжіння). Якщо ж маси порівнянні, то варто враховувати і вплив менш масивного тіла на більш масивне. У системі координат з початком у центрі мас орбіти обох тіл будуть конічними перерізами, що лежать в одній площині і з фокусами в центрі мас, з однаковим ексцентриситетом. Розходження буде тільки в лінійних розмірах орбіт (якщо тіла різної маси). У будь-який момент часу центр мас буде лежати на прямій, що з'єднує центри тіл, а відстані до центра мас r_1 і r_2 тіл масою M_1 і M_2 відповідно зв'язані наступним співвідношенням: $r_1/r_2 = M_2/M_1$. Перицентри й апоцентри своїх орбіт тіла також будуть проходити одночасно.