***Показникові нерівності***

При розв’язанні показникових нерівностей використовують властивість монотонності функції (див. таблицю вище).

*Приклад 1.*

$3^{2-x}>27$, тобто $3^{2-x}>3^{3}$

Оскільки $a=3, а 3>1$ функція зростаюча, то більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу і тоді

$$2-x>3;$$

$$-x>1;$$

$$x<-1.$$

*Відповідь:* $x<-1.$

*Приклад 2.*

$0,5^{5-2x}<8$,

вираховуємо $8=0,5^{-3}$

$0,5^{5-2x}<0,5^{-3}$,

так як  *а*=0,5 і 0<0,5<1, то функція спадна.

Тоді 5-2*х*>-3; -2*х*>-8; *х*<4.

*Відповідь:* $x<4.$

*Приклад 3.*

$$\frac{5^{4x}}{10^{3x}}<20^{x}∙\frac{1}{16^{x-1}}$$

Зведемо до спільної основи:

$$\frac{5^{4x}}{2^{3x}∙5^{3x}}<5^{x}∙4^{x}∙\frac{1}{2^{4(x-1)}};$$

$$\frac{5^{x}}{2^{3x}}<\frac{5^{x}∙4^{x}}{2^{4(x-1)}};$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}<\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4}$$

Оскільки $a<1 \left(\frac{1}{2}<1\right), то 3x>2x-4; x>-4.$

*Відповідь:* $x>-4.$

*Приклад 4.* Спосіб заміни при розв’язуванні нерівностей:

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x}-\frac{28}{3^{x+1}}+3<0;$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}-\frac{28}{3}∙\left(\frac{1}{3}\right)^{x}+3<0;$$

введемо нову невідому: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}=t;$

$$3y^{2}-28y+9<0;$$



Звідси $\frac{1}{3}<y<9$

$\frac{1}{3}<\left(\frac{1}{3}\right)^{x}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$- функція спадна

Отже, $-2<x<1$

*Відповідь:* $x\in \left(-2; 1\right).$

*Метод заміни змінної*

*Приклад 5.* Нехай потрібно розв’язати нерівність

$$\frac{1}{5^{x}-5}\leq \frac{2}{5^{x}+15}$$

Уведемо змінну $5^{x}=t$, тоді одержимо

$\frac{1}{t-5}\leq \frac{2}{t+15}$;

$$\frac{1}{t-5}-\frac{2}{t+15}\leq 0$$

$\frac{t+15-2(t-5)}{\left(t-5\right)(t+15)}\leq 0$;

$\frac{-t+25}{\left(t-5\right)(t+15)}\ll 0$ домножимо на (-1)

$\frac{t-25}{\left(t-5\right)(t+15)}\geq 0$ 🡘 $\left\{\begin{array}{c}\left(t-25\right)\left(t-5\right)(t+15)\geq 0\\t\ne 5 i t\ne 15\end{array}\right.$

*Розв’язуємо методом інтервалів*



$$t\in (-15;5)∪\left[25;+\infty )\right.$$

Повертаємось до заміни $\left\{\begin{array}{c}-15<5^{x}<5\\5^{x}\geq 25\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{c}5^{x}<5^{1}\\5^{x}\geq 5^{2}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{c}x<1\\x\geq 2\end{array}\right.$ 🢥 $x\in (-\infty ;1)∪\left[2;+\infty )\right.$

*Відповідь:* $ x\in (-\infty ;1)∪\left[2;+\infty )\right.$

*Приклад 6* Розв’язати нерівність:

$$3^{1+\sqrt{x+1}}+3^{2-\sqrt{x+1}}\geq 28$$

У відповідь записати найменший цілий розв’язок нерівності

Розв’язання

$$3^{1}∙3^{\sqrt{x+1}}+3^{2}:3^{\sqrt{x+1}}\geq 28$$

Нехай $3^{\sqrt{x+1}}=t$. Маємо $3t+\frac{9}{t}-28\geq 0$; $3t^{2}-28t+9\geq 0$

$3\left(t-\frac{1}{3}\right)(t-9)\geq 0$;

Нулі функції $t\_{1}=\frac{1}{3}$, $t\_{2}=9$ $\left[\begin{array}{c}t\_{1}\leq \frac{1}{3}\\t\_{2}\geq 9\end{array}\right.$



Повертаємося до заміни:

1. $3^{\sqrt{x+1}}\leq \frac{1}{3}$ або $3^{\sqrt{x+1}}\leq 3^{-1}$, тобто $\sqrt{x+1}\leq -1$ немає розв’язків;
2. $3^{\sqrt{x+1}}\geq 9$; $\sqrt{x+1}\geq 2$; $x\geq 3$.

*Відповідь:* Найменший цілий розв’язок: $x=3$.