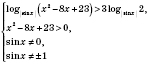
**Логарифмічні нерівності**

Розв’язуючи логарифмічні нерівності, спираються на такі твердження.  
1. Якщо https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3194_fmt.jpeg, то нерівність https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3195_fmt.jpeghttps://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3195_fmt1.jpeg рівносильна подвійній нерівності https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3196_fmt.jpeg.  
Це твердження можна записати у вигляді:  
https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3197_fmt.jpeghttps://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3198_fmt.jpeghttps://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3199_fmt.jpeg  
або https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3200_fmt.jpeg  
2. Якщо https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3201_fmt.jpeg, то нерівність https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3202_fmt.jpeg рівносильна подвійній нерівності https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3203_fmt.jpeg.  
Це твердження можна записати у вигляді:  
https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3204_fmt.jpeghttps://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3205_fmt.jpeghttps://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3206_fmt.jpeg  
або https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3207_fmt.jpeg  
Зверніть увагу: при розв’язуванні логарифмічної нерівності немає сенсу окремо виписувати ОДЗ, оскільки все одно буде необхідно розв’язувати систему нерівностей, яка включає й ОДЗ.  
*Приклади*1) https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3208_fmt.jpeg.  
Логарифмічна функція https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3209_fmt.jpeg з основою https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3210_fmt.jpeg спадна, отже, дана нерівність рівносильна системі  
https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3211_fmt.jpeghttps://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3212_fmt.jpeg  
https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3213_fmt.jpeghttps://subject.com.ua/dovidnik/math/image8756image_46_fmt.jpeg  
*Відповідь*: https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3214_fmt.jpeg (або у вигляді https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3215_fmt.jpeg.  
2) https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3216_fmt.jpeg.  
Нехай https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3217_fmt.jpeg.  
https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3218_fmt.jpeg, https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3219_fmt.jpeg, https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3220_fmt.jpeg.  
https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3221_fmt.jpeghttps://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3223_fmt.jpeghttps://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3222_fmt.jpeghttps://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3223_fmt1.jpeghttps://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3224_fmt.jpeg  
https://subject.com.ua/dovidnik/math/image8756image_24_fmt.jpeg  
*Відповідь*: https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3225_fmt.jpeg або https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3226_fmt.jpeg  
3) https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3227_fmt.jpeg.  
Розглянемо два випадки.  
https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3228_fmt.jpeghttps://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3229_fmt.jpeghttps://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3230_fmt.jpeghttps://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3231_fmt.jpeghttps://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3233_fmt.jpeghttps://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3234_fmt.jpeghttps://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3235_fmt.jpeg.  
https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3236_fmt.jpeghttps://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3237_fmt.jpeghttps://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3238_fmt.jpeghttps://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3239_fmt.jpeghttps://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3241_fmt.jpeghttps://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3242_fmt.jpeg.  
Об’єднуючи ці проміжки, одержимо відповідь.  
*Відповідь*: https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3243_fmt.jpeg.  
4) https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3244_fmt.jpeg.  
https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3245_fmt.jpeg; основою логарифма може бути тільки додатне число, яке не дорівнює 1. Виходячи з цього, отримуємо, що дана нерівність рівносильна системі:  
https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3247_fmt.jpeghttps://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3249_fmt.jpeghttps://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3250_fmt.jpeghttps://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3251_fmt.jpeghttps://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3252_fmt.jpeghttps://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3253_fmt.jpeg  
Якщо https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3254_fmt.jpeg, то https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3255_fmt.jpeg; https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3256_fmt.jpeg.  
Якщо https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3257_fmt.jpeg, то https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3258_fmt.jpeg; https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3259_fmt.jpeg.  
*Відповідь*: https://subject.com.ua/dovidnik/math/sprav-ukr3260_fmt.jpeg.

**Логарифмічні нерівності.**

Розв’язання логарифмічних нерівностей ґрунтується на властивостях логарифмічної функції, зокрема на її монотонності (зростання або спадання в залежності від величини основи). При цьому використовується взаємна оберненість показникової і логарифмічної функцій.

Найпростішими логарифмічними нерівностями називають нерівності

|  |  |
| --- | --- |
| http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image152.gif | http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image153.gif |

 (a 0, a 1)

а вигляд їх розв’язків (проміжків) залежить від чисел a і b:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image156.gif | a>1 | http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image157.gif |
| http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image154.gif | 0a1 | http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image155.gif |

Отже,http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image158.gif ,http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image159.gif.

Основною логарифмічною нерівністю називають нерівність

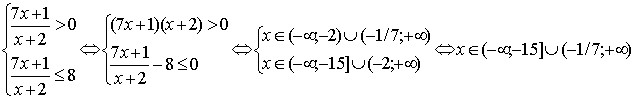
|  |
| --- |
| http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image160.gif |

а її розв’язання залежить від основи логарифмів a:

|  |
| --- |
| 1) при a>1        http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image161.gif |
| 2) при 0a1    http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image162.gif |

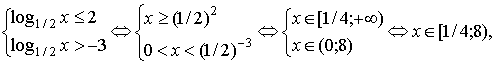
Зауваження. Найпростіша логарифмічна нерівність є окремий випадок основної логарифмічної нерівності.

Приклад 34. Розв’язати нерівністьhttp://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image163.gif

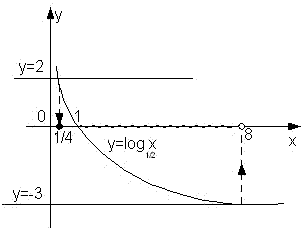
Розв’язання. Оскільки основа логарифма a=2>1 іhttp://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image164.gif , то задана нерівність рівносильна подвійній нерівності http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image165.gif або системі 

Відповідь:http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image167.gif . http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/2_image073.gif

Приклад 35. Розв’язати нерівністьhttp://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image168.gif

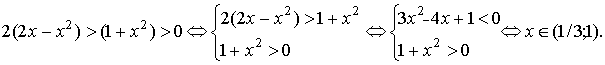
Розв’язання. Ця подвійна нерівність рівносильна системі двох найпростіших нерівностей 

що співпадає   з результатами графічного розв’язання заданої нерівності



 Відповідь: x[1/4;8). http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/2_image073.gif

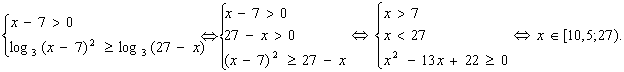
Приклад 36. Розв’язати нерівністьhttp://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image171.gif .

Розв’язання. Виконавши в лівій частині нерівності потенціювання, отримуємо рівносильну основну логарифмічну нерівністьhttp://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image172.gif  , яка рівносильна подвійній нерівності 

Відповідь: x(1/3;1). http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/2_image073.gif

Приклад 37. Розв’язати нерівність http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image174.gif

Розв’язання. Перейдемо в нерівності до логарифмів за основою 3: оскільки 1/3=3-1,  то http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image175.gif крім того,http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image176.gif . Отже,http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image177.gif

Враховуючи область визначення логарифмічної функції, маємо рівносильну систему 

Відповідь: x[10,5;27).http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/2_image073.gif

Приклад 38. Розв’язати нерівністьhttp://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image179.gif

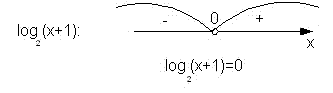
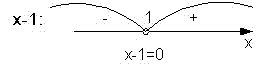
Розв’язання. Перейдемо до логарифмів за основою 5: http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image180.gif.

Отже, маємо рівносильну нерівністьhttp://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image181.gif , яка, після потенціювання лівої частини, рівносильна системі http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image182.gif

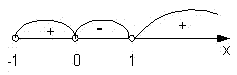
Відповідь: x(-1;1). http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/2_image073.gif

Приклад 39. Розв’язати нерівністьhttp://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image183.gif

Розв’язання. Ця нерівність рівносильна нерівностіhttp://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image184.gif , розв’язання якої виконаємо, застосувавши метод проміжків.



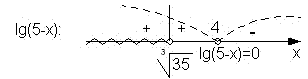
Врахувавши також область визначення функціїhttp://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image187.gif  (область визначення нерівності) x+10x-1, маємо проміжки знакосталості функції http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image188.gif



Відповідь: x(-1;0)(1;+).http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/2_image073.gif

Приклад 40. Розв’язати нерівність http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image190.gif

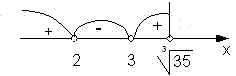
Розв’язання. Задана нерівність рівносильна нерівності http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image191.gifПерш ніж застосувати метод проміжків, знайдемо область визначення отриманої нерівності: http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image192.gif

,

отже, lg(5-x)>0.

Але тоді для отримання додатного добутка треба мати додатним і другий множник. Таким чином, задана нерівність рівносильна нерівності http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image194.gif

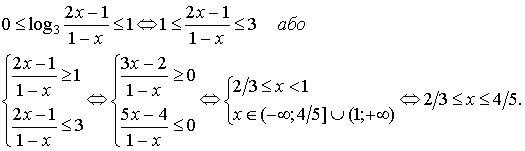
Ця основна логарифмічна нерівність рівносильна нерівностіhttp://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image195.gif

, отже 2<x<3.

 Відповідь: x(2;3).http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/2_image073.gif

Приклад 41. Розв’язати нерівністьhttp://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image197.gif

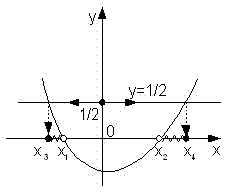
Розв’язання. Враховуючи властивості арифметичних коренів, задана нерівність рівносильна подвійній нерівності



Відповідь: x[2/3;4/5].http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/2_image073.gif

Приклад 42. Розв’язати нерівністьhttp://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image199.gif

Розв’язання. Оскільки 8/3>1, то, враховуючи властивості логарифмів за основою, більшою 1, маємо для заданої нерівності рівносильну нерівністьhttp://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image200.gif



 Оскільки http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image202.gif, тоhttp://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image203.gif  Для подвійної нерівності з таким квадратним тричленом ax2+bx+c  (a>0, D>0) маємо такий ескіз розв’язання, де x1, x2– корені рівняння x2-x-6=0, а   x3, x4– корені рівняння x2-x-6=1/2.  Тому або x3 x< x1або x2 <x x4.

http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/2_image073.gifВідповідь: http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image204.gif.

Приклад 43. Розв’язати нерівність http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image205.gif

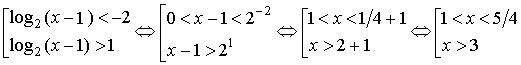
Розв’язання. Оскільки 1=(1/2)0 і 1/2<1, то задана нерівність рівносильна нерівності http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image206.gif

Оскільки x2+3>0, то отримана нерівність рівносильна нерівності -x2+x+2>0, тобто -1<x<2.

Відповідь: x(-1;2).http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/2_image073.gif

Розв’язання деяких нерівностей зручно зводити до розв’язання основної логарифмічної нерівності за допомогою відповідної логарифмічної підстановки.

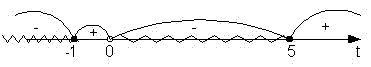
Приклад 44. Розв’язати нерівністьhttp://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image207.gif

Розв’язання. Спочатку перейдемо до логарифмів за основою 2:http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image208.gif  Отже, маємо таку логарифмічну нерівністьhttp://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image209.gif  Зробивши підстановку http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image210.gif, отримуємо нерівність t2+t>2  t<-2 або t>1. Таким чином, маємо сукупність двох найпростіших логарифмічних нерівностей 

Відповідь: x(1;5/4)(3;+).http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/2_image073.gif

Приклад 45. Розв’язати нерівністьhttp://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image212.gif

Розв’язання. Оскількиhttp://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image213.gif , то задану нерівність можна подати у виглядіhttp://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image214.gif  Зробивши підстановкуhttp://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image215.gif , отримуємо нерівність t-5/t4  t-5/t -40  (t2-5-4t)/t0. Ця алгебраїчна нерівність рівносильна системі http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image216.gif, а застосування методу проміжків дає необхідні проміжки

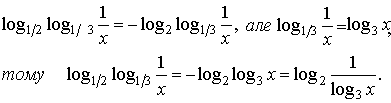
http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image217.gif

Отже, маємо відповідну сукупність логарифмічних нерівностей

http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image219.gif

Відповідь: x(0;1/2)(1;32.http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/2_image073.gif

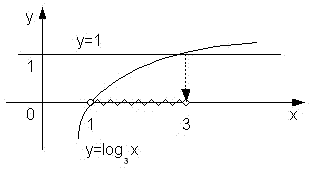
Приклад 46. Розв’язати нерівністьhttp://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image220.gif

Розв’язання. Логарифм правої частини запишемо, як і в лівій частині, за основою 2: 

Отже, задана нерівність рівносильна такій основній нерівності: http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image222.gif, або, зробивши підстановку http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image223.gif Ця подвійна нерівність рівносильна системі http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image224.gif

 Таким чином, маємо подвійну логарифмічну нерівністьhttp://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image225.gif

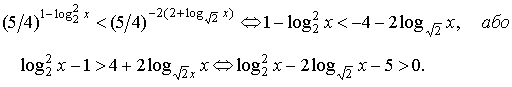
 що збігається з графічним розв’язанням



 Відповідь: x(1;3).http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/2_image073.gif

 Приклад 47. Розв’язати нерівністьhttp://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image227.gif .

Розв’язання. Запишемо ліву і праву частини нерівності як степені з однією основою: 1,25=5/4, 0,64=16/25=(4/5)2=(5/4)-2, тому маємо нерівність



Але http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image229.gif, тому, зробивши підстановкуhttp://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image215.gif , отримуємо нерівність t2-4t-5>0  t<-1 або t>. Таким чином, маємо сукупність нерівностей

http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image230.gif.

Відповідь: x(0;1/2)(32;+).http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/2_image073.gif

При розв’язанні більш складних нерівностей, що містять невідому і в основі логарифма і під знаком логарифма, слід спиратися на означення і властивості логарифмічної функції.

Приклад 48. Розв’язати нерівністьhttp://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image231.gif .

Розв’язання. Основа логарифма є додатне дійсне число, що не дорівнює 1. Отже, треба розглянути два випадки: x+1>1 і 0<x+1<1.

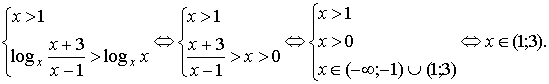
1)http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image232.gif

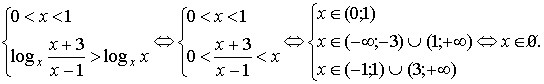
2)http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image233.gif

Відповідь: x(-1;0)(0;1).http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/2_image073.gif

Приклад 49. Розв’язати нерівність http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image234.gif

Розв’язання. Оскільки невідома є в основі логарифма, розглянемо дві можливості: x>1 і 0<x<1.

1) 

2)

Відповідь: x(1;3).http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/2_image073.gif