**Логарифмічні нерівності**

Розв’язуючи логарифмічні нерівності, спираються на такі твердження.
1. Якщо , то нерівність  рівносильна подвійній нерівності .
Це твердження можна записати у вигляді:

або 
2. Якщо , то нерівність  рівносильна подвійній нерівності .
Це твердження можна записати у вигляді:

або 
Зверніть увагу: при розв’язуванні логарифмічної нерівності немає сенсу окремо виписувати ОДЗ, оскільки все одно буде необхідно розв’язувати систему нерівностей, яка включає й ОДЗ.
*Приклади*1) .
Логарифмічна функція  з основою  спадна, отже, дана нерівність рівносильна системі


*Відповідь*:  (або у вигляді .
2) .
Нехай .
, , .


*Відповідь*:  або 
3) .
Розглянемо два випадки.
.
.
Об’єднуючи ці проміжки, одержимо відповідь.
*Відповідь*: .
4) .
; основою логарифма може бути тільки додатне число, яке не дорівнює 1. Виходячи з цього, отримуємо, що дана нерівність рівносильна системі:

Якщо , то ; .
Якщо , то ; .
*Відповідь*: .

**Логарифмічні нерівності.**

Розв’язання логарифмічних нерівностей ґрунтується на властивостях логарифмічної функції, зокрема на її монотонності (зростання або спадання в залежності від величини основи). При цьому використовується взаємна оберненість показникової і логарифмічної функцій.

Найпростішими логарифмічними нерівностями називають нерівності

|  |  |
| --- | --- |
| http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image152.gif | http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image153.gif |

 (a 0, a 1)

а вигляд їх розв’язків (проміжків) залежить від чисел a і b:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image156.gif | a>1 | http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image157.gif |
| http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image154.gif | 0a1 | http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image155.gif |

Отже, ,.

Основною логарифмічною нерівністю називають нерівність

|  |
| --- |
| http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image160.gif |

а її розв’язання залежить від основи логарифмів a:

|  |
| --- |
| 1) при a>1        http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image161.gif |
| 2) при 0a1    http://nuczu.edu.ua/material/mth/img/6_image162.gif |

Зауваження. Найпростіша логарифмічна нерівність є окремий випадок основної логарифмічної нерівності.

Приклад 34. Розв’язати нерівність

Розв’язання. Оскільки основа логарифма a=2>1 і , то задана нерівність рівносильна подвійній нерівності  або системі 

Відповідь: . 

Приклад 35. Розв’язати нерівність

Розв’язання. Ця подвійна нерівність рівносильна системі двох найпростіших нерівностей 

що співпадає   з результатами графічного розв’язання заданої нерівності



 Відповідь: x[1/4;8). 

Приклад 36. Розв’язати нерівність .

Розв’язання. Виконавши в лівій частині нерівності потенціювання, отримуємо рівносильну основну логарифмічну нерівність  , яка рівносильна подвійній нерівності 

Відповідь: x(1/3;1). 

Приклад 37. Розв’язати нерівність 

Розв’язання. Перейдемо в нерівності до логарифмів за основою 3: оскільки 1/3=3-1,  то  крім того, . Отже,

Враховуючи область визначення логарифмічної функції, маємо рівносильну систему 

Відповідь: x[10,5;27).

Приклад 38. Розв’язати нерівність

Розв’язання. Перейдемо до логарифмів за основою 5: .

Отже, маємо рівносильну нерівність , яка, після потенціювання лівої частини, рівносильна системі 

Відповідь: x(-1;1). 

Приклад 39. Розв’язати нерівність

Розв’язання. Ця нерівність рівносильна нерівності , розв’язання якої виконаємо, застосувавши метод проміжків.

 

Врахувавши також область визначення функції  (область визначення нерівності) x+10x-1, маємо проміжки знакосталості функції 



Відповідь: x(-1;0)(1;+).

Приклад 40. Розв’язати нерівність 

Розв’язання. Задана нерівність рівносильна нерівності Перш ніж застосувати метод проміжків, знайдемо область визначення отриманої нерівності: 

,

отже, lg(5-x)>0.

Але тоді для отримання додатного добутка треба мати додатним і другий множник. Таким чином, задана нерівність рівносильна нерівності 

Ця основна логарифмічна нерівність рівносильна нерівності

, отже 2<x<3.

 Відповідь: x(2;3).

Приклад 41. Розв’язати нерівність

Розв’язання. Враховуючи властивості арифметичних коренів, задана нерівність рівносильна подвійній нерівності

 

Відповідь: x[2/3;4/5].

Приклад 42. Розв’язати нерівність

Розв’язання. Оскільки 8/3>1, то, враховуючи властивості логарифмів за основою, більшою 1, маємо для заданої нерівності рівносильну нерівність



 Оскільки , то  Для подвійної нерівності з таким квадратним тричленом ax2+bx+c  (a>0, D>0) маємо такий ескіз розв’язання, де x1, x2– корені рівняння x2-x-6=0, а   x3, x4– корені рівняння x2-x-6=1/2.  Тому або x3 x< x1або x2 <x x4.

Відповідь: .

Приклад 43. Розв’язати нерівність 

Розв’язання. Оскільки 1=(1/2)0 і 1/2<1, то задана нерівність рівносильна нерівності 

Оскільки x2+3>0, то отримана нерівність рівносильна нерівності -x2+x+2>0, тобто -1<x<2.

Відповідь: x(-1;2).

Розв’язання деяких нерівностей зручно зводити до розв’язання основної логарифмічної нерівності за допомогою відповідної логарифмічної підстановки.

Приклад 44. Розв’язати нерівність

Розв’язання. Спочатку перейдемо до логарифмів за основою 2:  Отже, маємо таку логарифмічну нерівність  Зробивши підстановку , отримуємо нерівність t2+t>2  t<-2 або t>1. Таким чином, маємо сукупність двох найпростіших логарифмічних нерівностей 

Відповідь: x(1;5/4)(3;+).

Приклад 45. Розв’язати нерівність

Розв’язання. Оскільки , то задану нерівність можна подати у вигляді  Зробивши підстановку , отримуємо нерівність t-5/t4  t-5/t -40  (t2-5-4t)/t0. Ця алгебраїчна нерівність рівносильна системі , а застосування методу проміжків дає необхідні проміжки



Отже, маємо відповідну сукупність логарифмічних нерівностей



Відповідь: x(0;1/2)(1;32.

Приклад 46. Розв’язати нерівність

Розв’язання. Логарифм правої частини запишемо, як і в лівій частині, за основою 2: 

Отже, задана нерівність рівносильна такій основній нерівності: , або, зробивши підстановку  Ця подвійна нерівність рівносильна системі 

 Таким чином, маємо подвійну логарифмічну нерівність

 що збігається з графічним розв’язанням



 Відповідь: x(1;3).

 Приклад 47. Розв’язати нерівність .

Розв’язання. Запишемо ліву і праву частини нерівності як степені з однією основою: 1,25=5/4, 0,64=16/25=(4/5)2=(5/4)-2, тому маємо нерівність



Але , тому, зробивши підстановку , отримуємо нерівність t2-4t-5>0  t<-1 або t>. Таким чином, маємо сукупність нерівностей

.

Відповідь: x(0;1/2)(32;+).

При розв’язанні більш складних нерівностей, що містять невідому і в основі логарифма і під знаком логарифма, слід спиратися на означення і властивості логарифмічної функції.

Приклад 48. Розв’язати нерівність .

Розв’язання. Основа логарифма є додатне дійсне число, що не дорівнює 1. Отже, треба розглянути два випадки: x+1>1 і 0<x+1<1.

1)

2)

Відповідь: x(-1;0)(0;1).

Приклад 49. Розв’язати нерівність 

Розв’язання. Оскільки невідома є в основі логарифма, розглянемо дві можливості: x>1 і 0<x<1.

1) 

2)

Відповідь: x(1;3).