Основна логарифмічна тотожність

Означення логарифма можна коротко записати так:

$$a^{log\_{a}b}=b.$$

Ця рівність справедлива при b > 0, а > 0, а ≠ 1 і називається основною логарифмічною тотожністю. Наприклад: 2log 25 = 5,

2-log25 = (2log25)-1= 5-1 = .

Основні властивості логарифмів

При виконанні перетворень виразів, які містять логарифми, при обчисленнях і при розв’язуванні рівнянь, нерівностей часто використовуються властивості логарифмів.

Для будь-яких а > 0, а ≠ 1 і будь-яких доданих х і у виконуються такі рівності:

1) logа 1 = 0;

2) logа а = 1;

3) logа ху = logа х + logа у;

4) logа  = logа х - logа у;

5) loga xp = plogа х (p ∈ R);

6) logap x = logax;

7) loga x =   (b > 0, b ≠ 1).

Логарифм числа

Рівняння ax = b, де a > 0, a ≠ 1, b > 0 (рис. 1), має єдиний корінь. Його називають логарифмом числа b з основою а і позначають logab).



Рис. 1

Наприклад: коренем рівняння 2х = 8 є число 3, тобто log2 8 = 3.

Логарифмом додатного числа b за основою а, де а > 0, а ≠ 1, називають показник степеня, до якого треба піднести число а, щоб одержат число b.

Наприклад: log28 = 3, оскільки 23 = 8;

log2  = -2, оскільки 2-2 = :

log71 = 0, оскільки 70 = 1.

Розглянемо приклади використання формул 3—7. Обчислімо:

1)   log6 18 + log6 2 = log6( 18 ∙ 2)= log636 = 2;

2)   log12 48 - log12 4 = log12 = log1212 = 1;

3) log3= log3 = log33 =  ∙ 1 = ;

4) log1255 =  5 =  log55 =  ∙ 1 = ;

5)  = log416 = log442 = 2log44 = 2 ∙ 1 = 2.

Формулу 7 називають формулою переходу до логарифмів з іншою основою.

За допомогою формули 7 можна знаходити логарифми з довільною основою а, маючи таблиці логарифмів, складених для якої-небудь основи b. Найбільш уживаними є таблиці десяткових і натуральних логарифмів.

Десятковими логарифмами називають логарифми за основою 10, позначають lg.

Наприклад: lg100 = 2, lg 0,0001 = -4.

Натуральними логарифмами називають логарифми за основою е (число е — ірраціональне, е ≈ 2,718...), позначають ln.

Наприклад: ln е = 1, ln е2 = 2, ln = -1.

Дію знаходження логарифма числа (виразу) називають логарифмуванням.

Приклад 1. Прологарифмувати вираз у = .

Рoзв'язання

lgy = lg = lg(a2b2) – lgc3 = lga2+ lgb2– lgc3 = 2lga + 2lgb – 3lgc.

Дію, обернену до логарифмування, називають потенціюванням. Потенціювання —знаходження числа (виразу) за його логарифмом.

***Логарифмічна функція y = loga х, a > 0, a ≠ 1***

Функцію виду у = logax, де а > 0, а ≠ 1, називають логарифмічною. Основні властивості логарифмічної функції

1. Область визначення — (0;+∞).

2. Область значень — множина всіх дійсних чисел R.

3. Якщо х = 1, то у = 0.

4. Функція у = logax не є ні парною, ні непарною.

7. Якщо а > 1, функція у = loga х зростає, а при 0 < а < 1 — спадає.

8. Якщо а > 1 і х > 1, то у = logax > 0. Якщо а > 1 і 0 < х < 1,то у = logа х < 0. Якщо 0 < а < 1 і х > 1, то у = logaх < 0. Якщо 0 < а < 1 і 0 < х < 1, то у = logax > 0.

9. Графік функції у = logа х зображено на рис. 2.



Рис. 2

При знаходженні області визначення слід пам’ятати:

1. Якщо функція має вигляд у = logа(f(х)), а > 1, а ≠ 1, то слід вважати f(x) > 0 (під знаком логарифма може стояти тільки додатний вираз).

Наприклад: якщо у = lg(x2 -5x + 6), то x2- 5X + 6 > 0, тобто D(y) = (-∞; 2)(3; + ∞).

2. Якщо функція має вигляд у = log f(x) b, b > 0, то слід вважати  (основа логарифма може бути тільки додаток) і відмінною від одиниці).

Наприклад: якщо y = logx-110, то  тобто D(у) = (1; 2)(2; + ∞).

***Логарифмічні рівняння***

Логарифмічними називаються рівняння, які містять змінну під знаком логарифма.

 Приклад 3. Логарифмічні рівняння:

lgх = 1 + lg2 х, log2 (х + 3) = 9,  = lg.

Розв'язати логарифмічне рівняння — це означає знайти всі його корені або довести, що рівняння коренів не має.

Найпростіше логарифмічне рівняння має вигляд

 loga х = b, де а > 0 ,а ≠ 1, х > 0.

З означення логарифма випливає, що x = $a^{b}$.

Інший вигляд найпростішого логарифмічного рівняння:

loga x  =  loga b, де а > 0, а  1, х > 0, b > 0.

Із цього рівняння випливає, що х= b. Дійсно із рівності logax = loga b на підставі означення логарифма і основної логарифмічної тотожності маємо

х = alogab = b.

Найпростішим логарифмічним рівнянням є рівняння

logx а = b, де х > 0, х ≠ 1, а > 0.

За означенням логарифма маємо

xb = а, звідси х = .

В основному, усі логарифмічні рівняння, які ми будемо розв’язувати, зводяться до розв’язування найпростіших рівнянь.

Приклад 4. Розв’яжіть рівняння log3 (2x + 1) = 2.

Розв'язання

За означенням логарифма маємо

2х + 1 = 32, 2х = 8, х = 4.

Перевірка: log3 (2 ∙ 4 + 1) = log3 9 = 2.

Відповідь: 4.

Приклад 5. Розв’яжіть рівняння log3 х = log3 (6 - х2).

Розв'язання

Із рівності логарифмів чисел випливає

х = 6 - х2; х2 + х - 6 = 0; х1 = -3; х2 = 2.

Перевірка:

1) число - 3 не є коренем даного рівняння, бо вираз log3 (- 3) — не визначений;

2) log3х = log32; log3(6 - х2) = log3(6 - 22) = log32.

Відповідь: 2.

Приклад 6. Розв’яжіть рівняння logx+1 (2x2 + 1) = 2.

Розв'язання

За означенням логарифма маємо

2x2+ 1 = (х + 1)2; 2x2 + 1 = х2 + 2х + 1; х2 - 2х = 0; х1 = 0; х2 = 2.

Перевірка:

1) значення x = 0 не є коренем даного рівняння, оскільки основа логарифма x + 1 не повинна дорівнювати 1;

2) log2+1(2 ∙ 22 + 1) = log3 9 = 2.

Відповідь: 2.

Зазначимо, що в прикладах використовуються тільки такі перетворення, які не призводять до втрати коренів, але можуть привести до одержання сторонніх коренів. Тому перевірка кожного з одержаних коренів обов’язкова, якщо немає впевненості у рівносильності рівнянь.

Основні методи розв'язування логарифмічних рівнянь

1. Метод зведення логарифмічного рівняння до алгебраїчного.

Приклад 7. Розв’яжіть рівняння log22 х - 3 log2 х = 4.

Розв'язання

Позначимо log2 х через у. Дане рівняння набуває вигляду:

у2 - 3у = 4; у2 - 3у - 4 = 0; у1 = 4; у2 = -1.

Звідси log2x = 4, log2x = -1; x = 24, x = 2-1; x = 16, x = .

Перевірка:

1) log2216 - 31og216 = 16 -12 = 4;

2) log22 - 3log2 = 1 + 3 = 4.

Відповідь: 16, .

2. Метод потенціювання.

Приклад 8. Розв’яжіть рівняння log5 (x - 1) + log5 (х - 2) = log5 (х + 2).

Розв'язання

Пропотенціюємо дану рівність і одержимо:

log5 ((х - 1 )(х - 2)) = log5 (х + 2); (х - 1)(х - 2) = х + 2;

х2 - 2х - х + 2 = х + 2; х2 - 4х = 0; х(х - 4) = 0;

х = 0 або х = 4.

Перевірка:

1) значення х = 0 не є коренем рівняння, тому що вирази log5 (х - 1) і log5 (х - 2) не мають змісту при х = 0;

2) log5(х - 1) + log5(х - 2) = log5(4 - 1) + log5(4 - 2) = log53 + log52 = log5 (2 ∙ 3) = log5 6.

Отже, x = 4 — корінь.

Відповідь: 4.

3.    Метод зведення логарифмів до однієї основи.

Приклад 9. Розв’яжіть рівняння log3x - 2$log\_{\frac{1}{3}}x$ = 3.

Розв’язання

log3x - 2$log\_{\frac{1}{3}}x$= 3; log3x – 2 ∙$\frac{log\_{3}x}{log\_{3}\frac{1}{3}}$  = 3; log3x – 2 ∙  = 3;

log3x + 2log3х = 3; 3log3x = 3; log3x = 1; х = 3.

Перевірка: log3 3 - 2$log\_{\frac{1}{3}}3$ = 1 + 2 = 3. Отже, х = 3 — корінь.

Відповідь: 3.

4. Метод логарифмування.

Приклад 10. Розв'яжіть рівняння хlgx = 100х.

Розв'язання

Прологарифмуємо обидві частини рівності (х > 0) і одержимо

lg хlgx = lg (100х); lg х lg х = lg 100 + lg x; lg2 x - lg x - 2 = 0.

Замінимо lg x = у. Рівняння набуває вигляду:

y2- у - 2 = 0; y1 = 2; y2=-1.

Тоді: 1) lgx = 2; x = 102; x = 100.

2) lgx = -1; x = 10-1 = 0,1.

Перевірка:

1) xlgx = 100lg100 = 1002; 100x = 100 ∙ 100= 1002. Отже, x = 100 — корінь;

2) xlgx =0,1lg0,1= 0,1-1 = 1 = 10; 100x = 100 ∙ 0,1 = 10. Отже, x = 0,1 — корінь.

Відповідь: 100; 0,1.

5. Графічний метод розв’язування логарифмічних рівнянь.

Приклад 11. Розв’яжіть рівняння lgх = 1 - х графічно.

Розв'язання

В одній і тій самій системі координат побудуємо графіки функції у = lg x  і у = 1 - x (рис. 3). Абсциса точки перетину побудованих графіків дорівнює 1. Отже, х = 1 — корінь даного рівняння.

Відповідь: 1.



Рис. 3

Зауваження. Корінь цього рівняння легко знайти усно, однак треба пам’ятати, що в цьому випадку необхідно доводити той факт, що знайдений корінь єдиний.