Решение простейших показательных неравенств

**Простейшими** считаются показательные неравенства вида: **ax<ay**, **ax>ay**.  (ax≤ay, ax≥ay).

Так же, как и при решении простейших показательных уравнений, одинаковые основания степеней опускают, но **знак** нового неравенства**сохраняют**,**если** функция у=ахявляется возрастающей **(а>1**);**eсли** же показательная функция у=ах убывает **(0<a<1**), то**знак** нового неравенства**меняют на противоположный**:

ax**<**ay → x**<**y, если **a>1**; знак сохранен, так как функция возрастает;

ax**<**ay → x**>**y,  если **0<a<1**; функция убывает – знак поменялся;

ax**>**ay → x**>**y, если  **a>1**; знак сохранен, так как функция возрастает

ax**>**ay → x**<**y, если **0<a<1**; функция убывает – знак поменялся.

Примеры.

**Решить неравенство:**

**1) 45-2x<0,25**.

Представим правую часть в виде: 0,25=(25/100)=(1/4)=4-1;

45-2x<4-1; функция у=4х с основанием 4>1 **возрастает на R**, поэтому, опуская основания степеней, знак неравенства сохраним:

5-2x<-1;

— 2x<-1-5;

— 2x<-6  |:(-2) при делении обеих частей неравенства на отрицательное число, знак неравенства меняют на противоположный:

x>3.

[http://www.mathematics-repetition.com/wp-content/uploads/2012/06/pokaz-ner13.jpg](http://www.mathematics-repetition.com/wp-content/uploads/2012/06/pokaz-ner13.jpg)

Ответ: (3; +∞).

**2) 0,42х+1≥0,16.**

Представим число 0,16 в виде степени числа 0,4. Получаем:

0,42х+1**≥**0,42; основание степеней – число **0,4** — удовлетворяет условию: **0<0,4<1**; поэтому, опускаем основания степеней, а знак неравенства меняем на противоположный:

2х+1**≤**2;

2х≤2-1;

2х≤1  |:2

x≤0,5.

[http://www.mathematics-repetition.com/wp-content/uploads/2012/06/pokaz-ner2.jpg](http://www.mathematics-repetition.com/wp-content/uploads/2012/06/pokaz-ner2.jpg)

Ответ: (-∞; 0,5].

**3) 23-x+21-x>40.**  Применим формулу: **ax+y**=**ax∙ay**.  Запишем неравенство в виде:

23∙2-x+21∙2-x>40; Вынесем общий множитель за скобки:

2-x∙(23+21)>40;   упрощаем левую часть:

2-x∙(8+2)>40;

2-x∙10>40   |:10

2-x>4;

2-x>22;  основание степени — число**2>1**, значит, знак неравенства сохраняем:

— x>2  |:(-1) при делении обеих частей неравенства на отрицательное число — знак неравенства меняют на противоположный:

x<-2.

[http://www.mathematics-repetition.com/wp-content/uploads/2012/06/pokaz-ner3.jpg](http://www.mathematics-repetition.com/wp-content/uploads/2012/06/pokaz-ner3.jpg)

Ответ: (-∞; -2).

**4) 3x+2+3x+1+3x≤39**. Применяем формулу: **ax∙ay=ax+y**

3x∙32+3x∙31+3x≤39; вынесем общий множитель за скобки:

3x∙(32+31+1)≤39; упрощаем левую часть неравенства:

3x∙(9+3+1)≤39;

3x∙13≤39  |:13

3x≤3;

3x≤31; Показательная функция с основанием **3** (3>1) является возрастающей, поэтому, знак неравенства сохраним:

x≤1.

[http://www.mathematics-repetition.com/wp-content/uploads/2012/06/pokaz-ner4.jpg](http://www.mathematics-repetition.com/wp-content/uploads/2012/06/pokaz-ner4.jpg)

Ответ: (-∞; 1].

**Примеры решения показательных неравенств**

**(с разными основаниями)**

**№1**  Решите неравенство**http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/576163/img40.gif**

***Решение:***

***– – 1,5 > 0 ,***

***– ∙ – 1,5 > 0 ,***

Пусть http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/576163/img41.gif

http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/576163/img42.gif

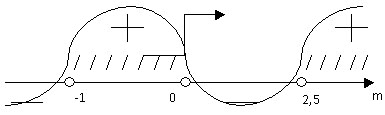
http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/576163/img43.gif

http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/576163/img44.gif

http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/576163/img45.gif

http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/576163/img46.gif

http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/576163/img47.gif



http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/576163/img48.gif http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/576163/img49.gif

http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/576163/img50.gif

http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/576163/img51.gif

http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/576163/img52.gif

***Ответ:* http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/576163/img53.gif**

**№2**  Решить неравенство http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/576163/img119.gif

***Решение:***

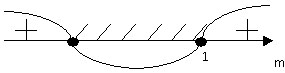
Разделим обе части неравенства на http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/576163/img120.gif:

http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/576163/img121.gif

Пусть http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/576163/img122.gif=m, m>0, тогда

http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/576163/img123.gif

http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/576163/img124.gif

http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/576163/img124.gif 

http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/576163/img125.gif;

http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/576163/img126.gif;

http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/576163/img127.gif;

***Ответ:* http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/576163/img128.gif.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№3** Решите неравенство | http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/532272/img15.gif | . |

Решение:

При *a* ≤ 0 и *a* = 0 показательная функция не определена, следовательно, неравенство не имеет решения.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Рассмотрим решение неравенства при *a* > 0, *a* ≠ 1 | http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/532272/img16.gif | . |

Введем вспомогательную переменную *ax* = *z*.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Тогда неравенство принимает вид | http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/532272/img17.gif | или | http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/532272/img18.gif | . |

Решив алгебраическое неравенство методом интервалов, получим *z* ∈ (-∞; 1 / 2) ∪ (1; 2),

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| или | http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/532272/img19.gif | . |

Монотонность показательной функции зависит от величины основания, следовательно,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| при *a* ∈ (0; 1) совокупность неравенств принимает вид | http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/532272/img20.gif | , |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а при *a* ∈ (1; +∞) | http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/532272/img21.gif | . |

Неравенство решено.

Ответ: при *a* ∈ (-∞; 0], *a* = 1 x ∈ ∅,

при *a* ∈ (0; 1) log*a* 2 < *x* < 0, x > -log*a* 2,

при *a* ∈ (1; +∞) 0 < *x* < log*a* 2, *x* < -log*a* 2.

