

Розв'язування складніших логарифмічних нерівностей.

При розв'язуванні більш складних логарифмічних нерівностей використовуємо прийоми розв'язування логарифмічних рівнянь та принципи за якими розв'язуються найпростіші логарифмічні нерівності.

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність: $\log_3(x-1) + \log_3(x+5) < 3$.

Розв'язання. Область допустимих значень знайдемо із системи:

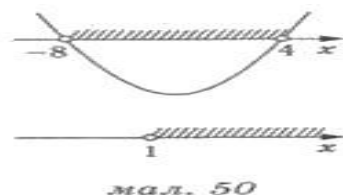
$$\begin{cases} x-1 > 0, \\ x+5 > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1, \\ x > -5, \end{cases} \quad x > 1.$$

На цій області визначення маємо $(x-1)(x+5) < 3$. Оскільки $3 > 1$, то знак нерівності не змінюємо: $(x-1)(x+5) < 3^3$.

При $x > 1$ умова $(x-1)(x+5) > 0$ виконується автоматично.

Маємо $x^2 + 5x - x - 5 - 27 < 0$; $x^2 + 4x - 32 < 0$.

Звідки $-8 < x < 4$ (мал. 50 — схема вгорі). Необхідно врахувати область визначення: $x > 1$ (мал. 50 — схема внизу).



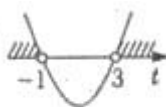
Відповіддю до початкової нерівності є переріз множин $-8 < x < 4$ і $x > 1$, тобто $1 < x < 4$.

Приклад 2. Розв'яжіть нерівність: $\log^2_{\frac{1}{2}} x - 2 \log_{\frac{1}{2}} x - 3 \geq 0$.

Розв'язання. Заміна $\log_{\frac{1}{2}} x = t$. Тоді $t^2 - 2t - 3 \geq 0$, звідки $t \leq -1$ або $t \geq 3$ (мал. 51). Маємо:

$$1) \ t \leq -1; \ \log_{\frac{1}{2}} x \leq -1; \ x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}; \ x \geq 2.$$

$$2) \ t \geq 3; \ \log_{\frac{1}{2}} x \geq 3; \ 0 < x < \left(\frac{1}{2}\right)^3; \ 0 < x < \frac{1}{8}.$$



мал. 51

Отже, розв'язками початкової нерівності є об'єднання множин $x \geq 2$
і $0 < x \leq \frac{1}{8}$, тобто $\left(0; \frac{1}{8}\right] \cup [2; +\infty)$.