Логарифмічні рівняння. Приклади

Логарифмічними називаються рівняння, що містять невідому величину під знаком логарифма або його основі (або в обох місцях одночасно). Їх легко звести до квадратних чи степеневих рівнянь відносно змінної, якщо знати властивості логарифма. Для прикладу, логарифмічними будуть наступні рівняння

$\log_2 x + \log_4 (x+4) = 6,$

$\log_x 9 = 3,$

$\log_x (x+3) = 5.$

Необхідно відзначити, що під час розв'язку логарифмічних рівнянь необхідно враховувати область допустимих значень (ОДЗ): під знаком логарифма можуть знаходитись тільки додатні величини, в основі логарифмів – додатні, відмінні від одиниці. Проте знаходження ОДЗ деколи може бути дуже громіздким і на практиці маємо можливість вибрати: шукати ОДЗ або зробити перевірку коренів у рівняння.

Найпростішим логарифмічним рівнянням називають рівняння виду

$\log_a x = b$

Його розв'язок обчислюється потенціюванням (знаходження числа або виразу за його логарифмом)

$x = a^b$

В деяких випадках, розв'язуючи логарифмічні рівняння, доцільно робити заміну змінної. Наприклад, у рівнянні

$\lg^2 x + 5\lg x - 6 = 0$

зручно зробити заміну $\lg x = y$ і ми приходимо до квадратного рівняння. Причому обидва корені цього квадратного рівняння можна підставити в заміну, щоб знайти відповідне x.

Варто запам'ятати, що десятковий логарифм від одиниці з наступними нулями дорівнює кількості нулів у запису цього числа.

$\lg 10000 = 4.$

Для десяткового логарифма від виразів вигляду 0,00001 в правило подібне. Він рівний кількості всіх нулів у запису цього числа, враховуючи і нуль цілих, взятих із знаком мінус. Для прикладу

$\lg 0,0000001 = -7.$

На цьому необхідний теоретичний матеріал розглянуто і можна переходити до розгляду практичних прикладів. Уважно розгляньте їх розв'язання, це дозволить засвоїти деякі правила логарифмів та збільшить практичну базу, що стане в нагоді при проходженні ЗНО, контрольних і т.д.

Приклад 1.
Розв'язати рівняння.

$2\log_4 x + 3\log_x 4 = 5$

Розв'язання.
Використовуючи властивість логарифмів переписуємо рівняння у вигляді

$2\log_4 x + 3\frac{1}{\log_4 x} = 5.$

Робимо заміну

$\log_4 x = y$

та переписуємо

$$2y+\frac{3}{y}=5.$$

Домножуємо на змінну y та записуємо у вигляді квадратного рівняння

$$2y^2-5y+3=0.$$

Обчислюємо дискримінант

$$D=5^2-4\cdot 2\cdot 3=1.$$

Корені рівняння набудуть значень

$$y_{1,2}=\frac{5\pm 1}{2\cdot 2}\Rightarrow y_1=\frac{3}{2};y_2=1.$$

Повертаємося до заміни та знаходимо

$$\log_4 x=\frac{3}{2}\Rightarrow x_1=4^{\frac{3}{2}}=2^{2\frac{3}{2}}=8;$$

$$\log_4 x=1\Rightarrow x_2=4^1=4.$$

Рівняння має два розв'язки

$$x_1=8;x_2=4.$$

Приклад 2.
Розв'язати рівняння.

$$\lg(10x)\lg(0,1x)=\lg x^3-3.$$

Розв'язання.
Розкриваємо дужки та записуємо у вигляді суми логарифмів

$$(\lg 10+\lg x)(\lg 0,1+\lg x)=3\lg x-3.$$

Враховуючи, що $\lg 10=1;\ \lg 0,1=\lg 10^{-1}=-1$ рівняння набуде вигляду

$$(\lg x+1)(\lg x-1)=3(\lg x-1).$$

Переносимо доданок за знаком рівності в праву сторону

$$(\lg x+1-3)(\lg x-1)=0;$$

$$(\lg x-2)(\lg x-1)=0.$$

Обидва множники прирівнюємо до нуля та знаходимо

$$\lg x-2=0\Rightarrow x_1=10^2=100;$$

$$\lg x-1=0\Rightarrow x_2=10.$$

Приклад 3.
Розв'язати рівняння

$$x^{2-0,5\lg x}=100.$$

Розв'язання.
Перепишемо праву сторону у вигляді квадрату та прологарифмуємо за основою 10 обидві частини рівняння

$$\lg x^{2-0,5\lg x}=\lg 10^2\Rightarrow(2-0,5\lg x)\lg x=2.$$

Робимо заміну
$\lg x = t$
та зводимо рівняння до квадратного
$(4-t)t = 4 \Rightarrow 4t - t^2 = 4 \Rightarrow t^2 - 4t + 4 = 0.$

Дискримінант такого рівняння приймає нульове значення, таке рівняння має два однакові розв'язки
$t_1 = t_2 = 2.$

Повертаємося до заміни, яку виконували вище
$\lg x = 2 \Rightarrow x = 10^2 = 100.$

Приклад 4.
Розв'язати рівняння.
$\log_{49} x^2 + \log_7 (x-1) = \log_7 (\log_{\sqrt{3}} 3)$

Розв'язання.
Виконаємо деякі перетворення з доданками рівняння
$\log_{\sqrt{3}} 3 = \log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^2 = 2;$
$\log_{49} x^2 = \log_{7^2} x^2 = \frac{2}{2} \log_7 x = \log_7 x;$
$\log_7 x + \log_7 (x-1) = \log_7 x(x-1).$

Логарифмічне рівняння спроститься до наступного
$\log_7 x(x-1) = \log_7 2.$

Оскільки логарифми мають однакові основи, то значення під знаком логарифма теж рівні. На основі цього дістанемо
$x(x-1) = 2.$

Розписуємо та розв'язуємо за допомогою дискримінанту
$x^2 - x - 2 = 0;$
$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9;$
$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 2;\ x_2 = -1.$

Другий корінь не може бути розв'язком, оскільки ніяке додатне число при піднесені до степені не дасть в результаті -1. Отже x=2 – єдиний розв'язок рівняння.

Приклад 5.
Знайти розв'язок рівняння.
$\log_{\sqrt{x}} 4 \cdot \log_2 \sqrt[4]{\frac{16}{8-x}} = 1.$

Розв'язання.
Виконуємо спрощення рівняння
$4 \log_x 2 \cdot \frac{1}{4} \log_2 \left(\frac{16}{8-x}\right) = 1;$
$\log_x 2 \cdot (\log_2 16 - \log_2 (8-x)) = 1;$
$\log_x 2 \cdot (4 - \log_2 (8-x)) = 1;$
$4 \log_x 2 - \log_x 2 \cdot \log_2 (8-x) = 1.$

За властивістю переходимо до другої основи у другому логарифмі

$\log_x 2 \cdot \log_2(8-x) = \log_x(8-x);$

$4\log_x 2 - \log_x(8-x) = 1;$

$\log_x \frac{2^4}{8-x} = 1.$

За правилом логарифмування маємо

$x^1 = \frac{2^4}{8-x}.$

Зводимо рівняння до квадратного та розв'язуємо його

$x = \frac{16}{8-x} \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0.$

$D = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0.$

Дискримінант рівний нулю, отже маємо один корінь кратності два

$x = \frac{8}{2 \cdot 2} = 2.$

Приклад 6.
Знайти розв'язок рівняння.

$\log_2(12 - 2^x) = 5 - x.$

Розв'язок.
Задане рівняння та подібні до нього розв'язуються шляхом зведення до спільної основи. Для цього перетворимо праву сторону рівняння до вигляду

$5 - x = \log_2 2^{5-x}$

та підставимо у рівняння

$\log_2(12 - 2^x) = \log_2 2^{5-x}.$

Оскільки основи логарифмів рівні переходимо до показникового рівняння

$12 - 2^x = 2^{5-x} = 2^5 \cdot 2^{-x}.$

Виконуємо заміну $2^x = t$ та зводимо до квадратного рівняння

$12 - t = \frac{32}{t} \Rightarrow t^2 - 12t + 32 = 0;$

$D = 12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 32 = 144 - 128 = 16;$

$t_{1,2} = \frac{12 \pm 4}{2} \Rightarrow t_1 = 8;\ t_2 = 4.$

Повертаємося до заміни та обчислюємо

$2^x = 8 = 2^3 \Rightarrow x = 3;$

$2^x = 4 = 2^2 \Rightarrow x = 2.$

Приклад 7.
Знайти розв'язок рівняння.

$\log_2\left(\lg x + 2\sqrt{\lg x} + 1\right) - 2\log_4\left(\sqrt{\lg x} + 1\right) = 1.$

Розв'язок.
Не лякайтеся подібних завдань, якщо робити все за правилами то рішення отримується без

труднощів. Забігаючи вперед скажу, що корені в дужках до прикладу відношення не мають. Вони для того, щоб налякати простих математиків.

Спростимо спочатку другий логарифм

$$2\log_{2^2}\left(\sqrt{\lg x}+1\right)=\frac{2}{2}\log_2\left(\sqrt{\lg x}+1\right)=\log_2\left(\sqrt{\lg x}+1\right).$$

Дальше виконуємо підстановку та зведення доданків під один логарифм

$$\log_2\left(\lg x+2\sqrt{\lg x}+1\right)-\log_2\left(\sqrt{\lg x}+1\right)=$$

$$=\log_2\frac{\lg x+2\sqrt{\lg x}+1}{\sqrt{\lg x}+1}.$$

Прирівнюємо до правої частини рівняння і спрощуємо

$$\log_2\frac{\lg x+2\sqrt{\lg x}+1}{\sqrt{\lg x}+1}=1\Rightarrow$$

$$\frac{\lg x+2\sqrt{\lg x}+1}{\sqrt{\lg x}+1}=2^1=2\Rightarrow$$

$$\lg x+2\sqrt{\lg x}=2\sqrt{\lg x}+2\Rightarrow$$

$$\lg x=2\Rightarrow x=10^2=100.$$

Як бачите – розв'язування виявилося простіше ніж виглядало до розв'язування, а результат x=100 лише підтверджує це.

При розв'язувані логарифмічних рівнянь важливо добре знати їх властивості. Всі решта дії зводяться, як правило, до розв'язання квадратних рівнянь чи степеневих залежностей відносно невідомих. Тож практикуйте самостійно і не майте труднощів з логарифмічними рівняннями.