

Решение упражнений.

1. Вычислите значение выражения

$$\log_2 8 * \log_8 14 * \log_{14} 20 \log_{20} 25 * \log_{25} 32$$

Решение:

$$\log_2 8 * \log_8 14 * \log_{20} 25 * \log_{25} 32 =$$

применим формулу переход от одного основания логарифма к другому основанию:

$$= \log_2 8 * \frac{\log_2 14}{\log_2 8} * \log_{14} 20 * \log_{20} 25 * \log_{25} 32 = \log_2 14 * \frac{\log_2 20}{\log_2 14} * \log_{20} 25 * \log_{25} 32 =$$

$$= \log_2 20 * \frac{\log_{20} 25}{\log_2 20} * \log_{25} 32 = \log_2 25 * \frac{\log_2 32}{\log_2 25} = \log_2 32 = 5$$

Ответ: 5

2. Решите уравнение $\log_7 \log_3 \log_2 \log_2 x = 0$

$$\text{Решение: } \log_7 \log_3 \log_2 \log_2 x = 0$$

Известно, что логарифм единицы равен нулю. Заменяем ноль на $\log_7 1$

$$\log_7 \log_3 \log_2 \log_2 x = \log_7 1$$

Если равны основания логарифмов, то равны и подлогарифмические выражения.

$$\log_3 \log_2 \log_2 x = 1$$

логарифм основания равен 1, тогда

$$\log_3 \log_2 \log_2 x = \log_3 3$$

$$\log_2 \log_2 x = 3$$

$$\log_2 \log_2 x = \log_2 8$$

$$\log_2 x = 8$$

$$x = 2^8$$

$$x = 256$$

Ответ: 256

3. Доказать тождество $\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_2 b$

$$\text{Доказательство: } \frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_2 b$$

Преобразуем левую часть тождества:

$$\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = \frac{\log_a x}{\frac{1}{\log_x ab}} = \frac{1}{\frac{\log_x a}{\log_x a + \log_x b}} = \quad (\text{логарифм произведения равен сумме}$$

логарифмов)

$$= \frac{\log_x a + \log_x b}{\log_x a} = \frac{\log_x a}{\log_x a} + \frac{\log_x b}{\log_x a} = 1 + \frac{\log_x b}{\log_x a}$$

Преобразуем правую часть тождества

$$1 + \log_a b = 1 + \frac{\log_x b}{\log_x a} \quad (\text{применили формулу перехода от одного основания логарифма к другому основанию})$$

Итак, $1 + \frac{\log_x b}{\log_x a} = 1 + \frac{\log_x b}{\log_x a}$

4. Прологаоифмируйте выражения по основанию 3

а) $81c^4\sqrt[4]{d^3k\sqrt{m^9}}$

$\log_3 81c^4\sqrt[4]{d^3k\sqrt{m^9}} = \log_3 81c^4d^{\frac{3}{2}}k^{\frac{1}{2}}m^{\frac{9}{4}}$ (логарифм произведения равен сумме логарифмов)

$= \log_3 81 + \log_3 c^4 + \log_3 d^{\frac{3}{2}} + \log_3 k^{\frac{1}{2}} + \log_3 m^{\frac{9}{4}}$ (логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм ее основания)

$= 4 + 4\log_3 c + \frac{3}{2}\log_3 d + \frac{1}{2}\log_3 k + \frac{9}{4}\log_3 m$

в) $\frac{27(a^2 - x^2)}{\sqrt[5]{c^3d^{12}}}$

$\log_3 \frac{27(a^2 - x^2)}{\sqrt[5]{c^3d^{12}}} =$ (логарифм частного равен разности логарифмов)

$= \log_3 27(a^2 - x^2) - \log_3 \sqrt[5]{c^3d^{12}}$ (каждое произведение логарифмов представим в виде суммы логарифмов)

$= \log_3 27(a^2 - x^2) - (\log_3 c^{\frac{3}{5}} \log_3 d^{12}) = 3 + \log_3(a^2 - x^2) - \frac{3}{5}\log_3 c - 12\log_3 d$

(логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм ее основания)

5. Дано $x = \frac{3a^2\sqrt[5]{b^3}}{c^4(a+b)}$, $a>0$; $b>0$; $c>0$

Найти $\lg x$

Решение:

$\lg x = \frac{\lg 3a^2\sqrt[5]{b^3}}{c^4(a+b)}$ (логарифм частного запишем в виде разности логарифмов)

$= \lg 3a^2b^{\frac{3}{5}} - \lg c^4(a+b)$ (каждое произведение логарифмов представим в виде суммы логарифмов)

$= \lg 3 + \lg a^2 + \lg b^{\frac{3}{5}} - (\lg c^4 + \lg(a+b)) = \lg 3 + 2\lg a + \frac{3}{5}\lg b - 4\lg c - \lg(a+b)$

Необходимо четко различать сумму логарифмов $\lg a + \lg b$ и логарифм суммы $\lg(a+b)$. Сумма логарифмов равна логарифму произведения, т.е $\lg a + \lg b = \lg ab$, а для логарифма суммы $\lg(a+b)$ формулы нет.

6. Упростить

а) $-\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$ Запишем условие в виде $-\log_3 \log_3 3^{\frac{1}{9}}$. Тогда, применяя к выражению последовательно формулы $\log_c a^3 = b \log_c a$ и $\log_a a = 1$, получим $-\log_3 \log_3 3^{\frac{1}{9}} = -\log_3 \frac{1}{9} \log_3 3 = -\log_3 3^{-2} = -(-2) = 2$

Ответ: 2

б) $36^{\log_6 5} + 10^{1-\log_2} - 3^{\log_9 36} = 6^{2\log_9 36} + 10^{\lg 10 - \lg 2} - 3^{\log_3 6^2} = 6^{\log_6 5^2} + 10^{\lg \frac{10}{2}} - 3^{\log_3 6} = 5^2 + 5 - 6 = 24$
 Ответ: 24

7. Найти $\log_{30} 8$, если известно, что $\lg 5 = a$, $\lg 3 = b$

Решение:

$$(1) \log_{30} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 30} = \frac{3}{\log_2 (253)} = \frac{3}{1 + \log_2 5 + \log_2 3}$$

$$(2) \lg 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 10} = \frac{\log_2 5}{\log_2 (25)} = \frac{\log_2 5}{1 + \log_2 5} = a$$

$$\log_2 5 = a(1 + \log_2 5)$$

$$\log_2 5 = a + a \log_2 5$$

$$\log_2 5 - a \log_2 5 = a$$

$$\log_2 5(1 - a) = a$$

$$\log_2 5 = \frac{a}{1 - a}$$

$$(3) \text{Аналогично } \lg 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 10} = \frac{\log_2 3}{\log_2 (25)} = \frac{\log_2 3}{1 + \log_2 5} = \frac{\log_2 3}{1 + \frac{1}{1 - a}} = \frac{(1 - a) \log_2 3}{1} = b$$

$$(1 - a) \log_2 3 = b \quad \log_2 3 = \frac{b}{1 - a}$$

$$\text{Подставляя (2) и (3) в (1), имеем } \log_{30} 8 = \frac{3}{1 + \frac{a}{1 - a} + \frac{b}{1 - a}} = \frac{3}{\frac{1 - a + a + b}{1 - a}} = \frac{3(1 - a)}{1 + b}$$

$$\text{Ответ: } \frac{3(1 - a)}{1 + b}$$